TREBALL DE FI DE GRAU

Grau en Matemàtiques

Títol: Mètodes per determinar màxims i mínims anteriors a Newton i Leibniz

Autor: Nora Jarque García

Director: Maria Rosa Massa Esteve

Codirector: Mònica Blanco Abellán

Departament: Matemàtiques

Convocatòria: 2017-18

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Índex

1. Introducció 3
2. Arquimedes de Siracusa (287 aC-212 aC) 5
   2.1. Biografia 5
   2.2. Obres 6
   2.3. La proposició 4 del llibre segon de *Sobre l'esfera i el cilindre* 7
   2.4. Conclusions 13
3. Sharaf al-Din al-Tusi (c. 1135-c. 1213) 15
   3.1. Biografia i obres 15
   3.2. *L'Àlgebra* d'al-Tusi i el càlcul de màxims 16
   3.3. Màxim de l'equació de tipus 21 18
   3.4. Conclusions 21
4. Johannes Kepler (1571-1630) 23
   4.1. Biografia 23
   4.2. Obres 24
   4.3. *Nova stereometria doliorum vinariorum* i el barril de màxima capacitat 25
   4.4. Conclusions 31
5. Pierre de Fermat (1601-1665) 33
   5.1. Biografia 33
   5.2. Obres 34
   5.3. El mètode de màxims i mínims 35
   5.4. Aplicacions del mètode 41
   5.5. Conclusions 45
6. Pierre Hérigone (1580-1643) 46
   6.1. Biografia i obres 46
   6.2. El mètode de màxims i mínims al *Cursus mathematicus* d'Hérigone 47
   6.3. Conclusions 53
7. Conclusions 54

Referències 56

APÈNDIX A: Reproducció del lema a l'anàlisi de la proposició 4 del llibre II de *Sobre l'esfera i el cilindre* 59

APÈNDIX B: Carta a Brûlart de Saint-Martin 62

1. Introducció

La determinació de màxims i mínims és un problema clau en el desenvolupament històric del que, a partir d'Isaac Newton (1643-1727) i Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), es coneix com a càlcul infinitesimal. Fins als inicis del càlcul infinitesimal, però, no hi havia un mètode o algoritme general per resoldre els problemes de càlcul de màxims i mínims.

Es considera que Newton i Leibniz van inventar, de manera independent, els procediments algorítmics que són, en essència, els mateixos que s'utilitzen avui en dia al càlcul. [1, p. 188] Però el càlcul infinitesimal no és només degut a les contribucions significants de Newton i Leibniz sinó que es deu també als progressos fets, als segles anteriors a ells, en la investigació de problemes relacionats amb la determinació d'àrees, volums o tangents a partir de mètodes geomètrics. [2]

Al segle XVII va haver diferents intents de trobar nous mètodes per resoldre aquests problemes. La ràpida algebrització del llenguatge matemàtic al segle XVII va ser molt significativa en el desenvolupament del càlcul. [2] Tot i això, encara no es comptava amb la idea de funció, sinó que les corbes que es consideraven estaven definides a partir de les seves propietats geomètriques. [3]

El càlcul infinitesimal de Newton i Leibniz es pot aplicar a gran nombre de disciplines. Va permetre solucionar els problemes de màxims i mínims, de determinació de tangents, àrees o volums. Fins llavors, al llarg del temps, aquests problemes s'havien estudiat i resolt en casos particulars, havent necessitat construccions enginyoses per cada cas, ja que no hi havia un algoritme general que permetés solucionar-los amb facilitat. Tot i que hi ha estudis que els tracten de manera individual, els diferents camins presos per resoldre aquests problemes de màxims i mínims abans de Newton i Leibniz, han estat, en general, poc estudiats de manera conjunta fins ara.

En l'actualitat els problemes d'extrems considerats en aquest treball es poden resoldre fàcilment escrivint l'expressió a optimitzar en forma de funció, fent la derivada i cercant-ne els punts crítics.

L'objectiu principal d'aquest treball ha estat fer una revisió d'algunes de les tècniques utilitzades per resoldre alguns d'aquests problemes relacionats amb màxims i mínims. Concretament en aquest treball s'estudien els escrits d'Arquimedes (287 aC-212 aC), Sharaf al-Din al-Tusi (c. 1135-c. 1213), Johannes Kepler (1571-1630), Pierre de Fermat (1601-1630) i Pierre Hérigone (1580-1643). I d'aquesta manera veure si hi podria haver un lligam entre algunes d'elles o si es tracten de solucions particulars i aïllades per a cada problema.

El treball realitzat ha consistit en l'estudi dels mètodes proposats per cada autor a partir de les fonts originals o, quan això no ha estat possible, a partir de les seves traduccions .

Cadascun dels autors estudiats té un objectiu diferent que el condueix un problema per determinar els màxims o mínims, partint, per exemple, de problemes geomètrics o de la cerca d’arrels d’una equació, i en conseqüència, degut a l’origen i caràcter del problema, cadascun s’hi enfrontarà emprant tècniques diferents.

2. Arquimedes de Siracusa (287 aC-212 aC)

Arquimedes (287 aC-212 aC) dóna la solució de quin és el punt per on s'ha de tallar un segment de manera que el volum del sòlid obtingut prenent una de les parts com alçada i el quadrat de l'altra com a base sigui màxim.

La demostració d'aquest problema es troba en un apèndix de la seva obra *Sobre l'esfera i el cilindre*[1]. Aquest apèndix es va considerar perdut durant segles fins que el va recuperar un comentarista grec, Eutoci d'Ascaló (c. 480 dC), que el va incloure al seu comentari dels llibres *Sobre l'esfera i el cilindre* d'Arquimedes.

2.1. Biografia[2]

Arquimedes de Siracusa (287 aC – 212 aC) va ser un matemàtic, astrònom, físic i enginyer grec. Es coneixen pocs detalls de la seva vida, tot i que hi ha moltes anècdotes de les seves invencions mecàniques. Entre els seus invents destaquen el cargol d'Arquimedes, utilitzat per elevar aigua per la irrigació, estudis sobre les palanques i la invenció de la balança romana. També se li atribueix el principi hidrostàtic d'Arquimedes, lligat a la llegenda de la comprovació de si la corona del rei Hieró II era d'or pur o no. Segons el relat, la solució al problema se li hauria ocorregut mentre es submergia a l'aigua del bany i és d'on ve la cèlebre expressió "Eureka!" (Ho he trobat!).

Era fill d'un astrònom anomenat Fidias, i sembla ser que la seva família podria estar emparentada amb el rei Hieró II de Siracusa.

Es creu amb bastanta seguretat que va viatjar a Egipte i visitar Alexandria, centre cultural i del coneixement del món grec en aquella època, on hauria estudiat amb els successors d'Euclides, però que va tornar a Siracusa, lloc on va escriure la major part dels seus treballs i on va morir durant el setge romà de la ciutat a la Segona Guerra Púnica.

Arquimedes utilitzava a les seves demostracions dues tècniques matemàtiques que caracteritzen avui en dia els estàndards del rigor clàssic: el mètode d'exhaustió i la reducció a l'absurd.

[1] Segons Arquimedes explica en aquesta obra, l'estudi d'aquest màxim està motivat per l'anàlisi d'un problema al que arriba en l'estudi de la proposició 4 del segon llibre de *Sobre l'esfera i el cilindre.* Promet estudiar aquest problema de forma general en un apèndix al final de l'obra. [4], [5], [8]

[2] [27, pp. 213-214, vol. I], [36], [3]

2.2. Obres[3]

Les obres d'Arquimedes que es conserven són totes de caràcter teòric, dedicades a la geometria, física i matemàtica. Són els llibres *Sobre l'esfera i el cilindre, Sobre la mesura del cercle, Sobre els conoides i els esferoides, Sobre les línies espirals, Sobre l'equilibri de figures planes,* l'*Arenari,* la *Quadratura de la paràbola, Sobre els cossos flotants,* l'*Stomachion,* el *Mètode* i *El problema dels bous*, a part de breus fragments o resums dels seus treballs sobre polígons semiregulars i catòptrica.

Els escrits d'Arquimedes no eren obres pensades per a un públic ampli, sinó que es dirigien a altres savis que poguessin jutjar els coneixements exposats en aquests treballs. Per aquesta raó, dóna per sobreentesos certs passos dels raonaments a les proposicions que probablement li semblessin obvis, per tant, els qui no tinguessin grans coneixements sobre els seus temes podien tenir dificultats en seguir-los.

Arquimedes solia enviar els seus escrits matemàtics en forma de cartes a altres coneguts a Alexandria (com Conó, Dositeu, Eratòstenes…), qui segons sembla també s'encarregaven de distribuir-los. Acompanyava els texts d'una carta introductòria que normalment contenia un resum de les proposicions que demostraria i a vegades feia referències a altres problemes que havia tractat en ocasions anteriors. Això ha ajudat a l'hora d'intentar trobar l'ordre amb que es van escriure i determinar la seva autoria. L'atribució de la resta d'obres a Arquimedes es basa en referències antigues a treballs seus que coincideixen amb els continguts de les obres conservades. Hi ha altres obres que han estat atribuïdes a Arquimedes per diversos autors en fonts antigues, però no se'n conserven els textos en cap llengua. [4, pp. 25-33] [5, pp. 10-13]

No es té constància de com i quan aquesta xarxa de correspondències es va convertir en les col·leccions de tractats d'Arquimedes que es conserven a l'actualitat. Es creu que entre els segles V i VI, a l'Imperi Bizantí es van fer bastantes col·leccions que contenien els seus treballs. La primera compilació de la que es té notícia es va fer a Constantinoble el segle VI, època en la qual Eutoci d'Ascaló (c. 480 dC) va afegir els comentaris que acompanyen algunes d'aquestes obres. Les traduccions d'algunes obres d'Arquimedes també van arribar al món àrab al voltant del segle IX. En aquesta època es van fer diverses còpies dels treballs de l'antiguitat en forma de llibres enlloc de pergamins o papirs, i es van fer almenys tres còdexs que contenien els treballs d'Arquimedes, dos dels quals són ara perduts, dels quals deriven els manuscrits que es conserven a l'actualitat.

Durant el segle XIII aquests treballs van arribar a Europa, on els texts d'Arquimedes van prendre molta rellevància per la renaixença matemàtica dels segles XV i XVI, en que es van fer diverses còpies manuscrites dels còdexs i traduccions. La primera edició en impremta de les obres d'Arquimedes es va publicar el 1544 a Basilea, i a partir d'aquest moment es van publicar diverses edicions.

[3] [27, pp. 214-231, vol. I]

J.L. Heiberg va publicar, entre 1879 i 1881, un estudi dels texts i la primera edició de l'obra completa d'Arquimedes coneguda, en un intent d'unificar els seus tractats i ordenar-los temporalment, que va reeditar el 1915 a *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii*. [6]

Les obres d'Arquimedes estan acompanyades dels comentaris d'Eutoci d'Ascaló[4] a gran part de les edicions modernes i gairebé tots els manuscrits principals.

2.3. La proposició 4 del llibre segon de *Sobre l'esfera i el cilindre*[5]

Els llibres *Sobre l'esfera i el cilindre* són dos texts separats dirigits a Dositeu, a qui Arquimedes adreça l'obra. No van ser concebuts per Arquimedes com un tractat únic. El primer volum va ser escrit amb la voluntat de donar a conèixer certs resultats, fonamentalment teòrics, sobre els estudis de les propietats mètriques de l'esfera. A les 44 proposicions que conté hi apareixen càlculs i resultats sobre la superfície i volum d'aquesta i també de segments esfèrics (els sòlids obtinguts en tallar una esfera entre un parell de plans paral·lels). El segon volum recull demostracions de problemes que Arquimedes havia enviat prèviament sense resoldre. Hi ha sis problemes i tres teoremes, relacionats amb tallar esferes segons diferents paràmetres donats, però sense un objectiu comú. Probablement, degut a la coincidència en els temes dels continguts s'han transmès des de l'antiguitat com una obra conjunta.

L'objectiu de la proposició 4 del llibre segon de *Sobre l'esfera i el cilindre*, és trobar la manera com "Tallar una esfera donada de manera que els segments de l'esfera, l'un respecte de l'altre, tinguin la mateixa raó que la donada." [7, p. 179]

En l'anàlisi, Arquimedes redueix el problema a tallar un segment de manera que satisfaci les condicions següents: "donades dues rectes BΔ i BZ, essent BΔ doble de BZ i el punt Θ sobre BZ, tallar ΔB per X i, com el quadrat a partir de BΔ respecte del quadrat a partir de ΔX, fer XZ respecte de ZΘ." [7, p. 181] (Figura 1)

[4] Eutoci d'Ascaló fou un erudit grec de finals del segle V i principis del VI nascut a Ascaló (actualment a Israel), i educat a Constantinoble. Es conserven els seus comentaris a *Sobre l'esfera i el cilindre*, *La mesura del cercle,* i *L'equilibri de les figures planes* d'Arquimedes, i als quatre primers llibres de les *Còniques* d'Apol·loni de Perga.

Va escriure el *Comentari als llibres sobre l'Esfera i el Cilindre* considerant que cap dels seus predecessors havia escrit un assaig sobre aquests llibres i amb la voluntat d'ajudar a la comprensió dels teoremes que contenen [4, p. 72]. En aquests comentaris, Eutoci completa les proposicions d'Arquimedes afegint demostracions, amb la construcció de figures o explicant més detalladament els passos de determinades manipulacions amb proporcions. El comentari del primer volum consisteix en algunes glosses explicant els detalls matemàtics en certs arguments, mentre que el comentari del segon volum és un treball molt més minuciós on comenta una gran proporció dels problemes. [27, pp. 488-491, vol. IV]

[5] A l'apèndix A es troba la traducció al català del tots els passos de la demostració estudiada. Per a aquest apartat, he utilitzat principalment les traduccions de Ver Eecke al francès [8], Netz a l'anglès [9] [5], i d'Ortiz al castellà [4].

Ho podríem escriure amb notació actual com: donat un punt B en un segment ΔZ que de manera que $\Delta B = 2BZ$, i un punt Θ al segment BZ, tallar ΔB per X de manera que se satisfaci la proporció $\frac{B\Delta^2}{\Delta X^2} = \frac{XZ}{Z\Theta}$, és a dir, $\Delta B^2 \cdot \Theta Z = \Delta X^2 \cdot XZ$.

Arquimedes promet afegir l'anàlisi i síntesi del cas general d'aquest problema derivat de la proposició 4 en un apèndix al final del llibre, però tot i això, sembla ser que aquest apèndix es perd de la tradició manuscrita, i no apareix als manuscrits de *Sobre l'esfera i el cilindre* que arriben a Eutoci quan hi escriu el seu comentari. [5, p. 206]

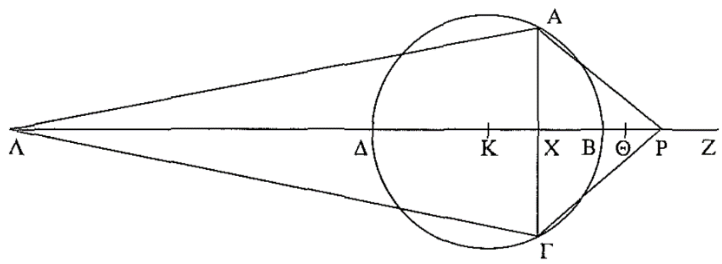


Figura 1. Reproducció del dibuix de la proposició 4 del llibre II Sobre l'esfera i el cilindre [4, p. 214]

Eutoci, després de buscar aquest apèndix per escriure el comentari a *Sobre l'esfera i el cilindre*, creu trobar-lo en un llibre antic que arriba a les seves mans. Segons Eutoci, podria ser l'apèndix promès per Arquimedes en tractar-se d'uns teoremes amb alguns errors i incorreccions, però que contenien el fonament del que s'investigava, i conservaven el dialecte dòric habitual en Arquimedes [4, p. 392]. Degut a que li semblava difícil seguir el text en l'estat en què l'havia trobat, decideix escriure'l "en un llenguatge més corrent i més clar en la mesura del possible" [4, p. 87].

A part de l'apèndix, en el seu comentari també recull les solucions al problema proposades per altres matemàtics, Dionisidor i Diocles, que resolen el tall de l'esfera de manera alternativa a la d'Arquimedes.

En un lema a l'anàlisi d'aquest apèndix d'Arquimedes reproduït per Eutoci, apareix l'afirmació i la demostració que:

> Donat un segment BA, el sòlid de base el quadrat de costat BE i alçada EA és el més gran de tots els que es poden construir quan BE és el doble de EA. [4, p. 394]

És a dir, que Arquimedes demostra que en el problema de tallar un segment donat per un punt i construir un sòlid prenent una de les parts com a alçada i el quadrat de l'altra com a base, el màxim volum s'obté quan es talla en un terç i es pren la part més curta com alçada i l'altra com a costat de la base.

Per tal de comparar les àrees i volums dels diferents sòlids que s'obtenen segons el punt per on es talli el segment de l'enunciat, Arquimedes utilitza diferents propietats de les còniques.

Utilitzant la paràbola (Figura 2), passa de la comparació d'àrees de quadrats a la de rectangles. Arquimedes defineix la paràbola amb vèrtex en H a partir d'un segment HM, anomenat paràmetre de la paràbola, de manera que es compleixi la condició següent: per tot punt Ψ de la paràbola, el quadrat de costat ΨX ha de ser igual que el rectangle de costats XH i HM, on X s'obté amb la intersecció de l'eix de la paràbola i la recta perpendicular a aquest que passa per Ψ.

Escrivint aquesta paràbola com $y = ax^2$, el paràmetre de la paràbola, HM, es correspon amb la constant $\frac{1}{a}$, ja que, en termes actuals, si escrivim la longitud dels segments $\Psi X = x$ i $XH = y$, obtenim:

$$\Psi X^2 = XH \cdot HM \Rightarrow \; x^2 = y \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow \; y = ax^2$$

D'aquesta manera, Arquimedes pot establir que el quadrat de costat TX és menor que el rectangle de costats XH i HM, ja que aquest rectangle, per la paràbola, és igual al quadrat de costat ΨX, i aquest quadrat és més gran que el de costat TX.

Aquesta relació es podria escriure en termes actuals com $TX^2 < XH \cdot HM$, a partir de la igualtat anterior i el fet de que $TX < \Psi X$. Fixant $x = \Psi$X, i posant $x_1 = TX$, i equivaldria a observar que, per $|x_1| < |x|$, $x_1^2 < ya$.

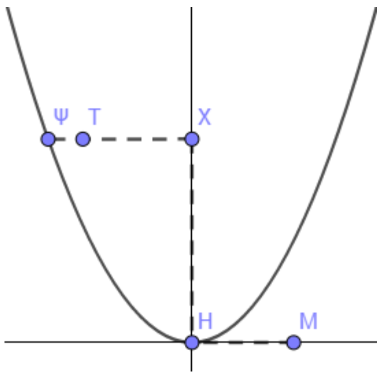


Figura 2. Il·lustració per la propietat de la paràbola [Elaboració pròpia]

També utilitza la següent propietat de la hipèrbola: si s'hi prenen dos punts i es tracen dos segments paral·lels que es trobin amb una asímptota en un angle qualsevol i dos altres que es trobin amb l'altra asímptota en un altre angle qualsevol, llavors el producte dels segments traçats a partir d'un punt és igual al producte dels segments a partir de l'altre. A la demostració, Arquimedes utilitza segments que es troben en angle recte per comparar àrees rectangulars. A la figura 3 aquesta propietat, li permet afirmar que $\Phi T \cdot TY = AB \cdot BH$.

Com utilitza una hipèrbola rectangular, podem considerar els eixos com les asímptotes, per escriure-la en termes actuals amb la fórmula $xy = k$, amb k constant.

Llavors, anomenant $\Phi T = x_1, TY = y_1$ i $AB = x_2, BH = y_2$, obtenim la igualtat dels rectangles anterior:

$$x_1 y_1 = k = x_2 y_2 \Rightarrow \Phi T \cdot TY = AB \cdot BH$$

A partir d'aquesta igualtat, Arquimedes pot deduir a la demostració que els rectangles $\Phi T \cdot T\Sigma$ i $\Sigma B \cdot BH$ son iguals, restant a banda i banda el rectangle comú $\Gamma A \cdot A\Sigma$.

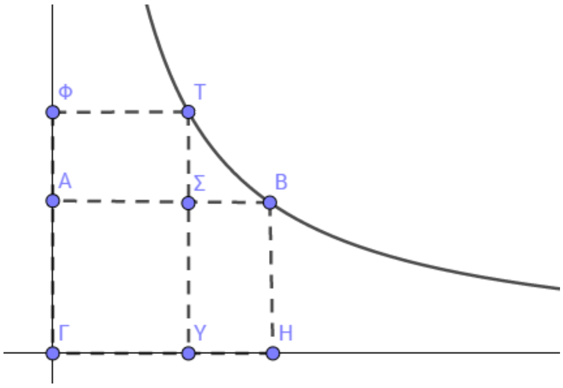


Figura 3. Il·lustració per la propietat de la hipèrbola [Elaboració pròpia]

El problema està enunciat a l'apèndix de forma general i amb lletres diferents (Figura 4):

> Donada una recta AB i una altra AΓ, i una àrea Δ, proposi's prendre un punt E en la recta AB de manera que AE sigui a AΓ com l'àrea Δ al quadrat de costat EB. [4, p. 392]

i Arquimedes afirma a l'anàlisi que:

> El sòlid construït sobre l'àrea BE amb altura EA és el més gran de tots els que es poden construir semblants a ell amb altura BA quan BE sigui el doble de EA, segons es demostrarà. [4, p. 394]

És a dir que donats una àrea Δ, i dos segments, AΓ i AB, vol trobar un punt E en el segment AB de manera que, com escriuríem amb notació actual, $\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{\Delta}{EB^2}$, que equival a trobar el punt E de manera que $AE \cdot EB^2 = \Delta \cdot A\Gamma$, que és el volum del sòlid al qual es refereix .

Si, usant notació actual, anomenem $AB = a, A\Gamma = b, \Delta = c^2$ i $EB = x$, això equival a que es compleixi la proporció $\frac{a-x}{b} = \frac{c^2}{x^2}$. Arquimedes afirma que el màxim volum del sòlid, que ara representaríem per $(a-x)x^2$, s'obté quan $BE = 2EA$, és a dir, quan $x = 2(a-x) \Rightarrow x = \frac{2}{3}a$ en notació actual.

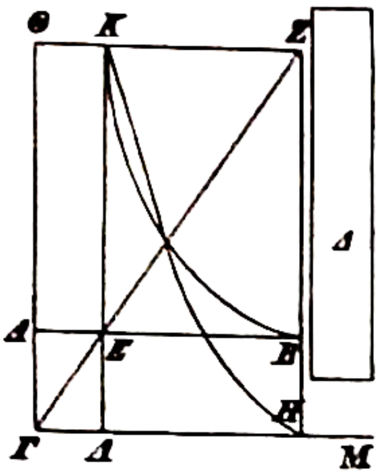


Figura 4. Esquema de l'anàlisi del problema a l'apèndix [8, p. 637]

La demostració d’aquesta afirmació es troba en un lema a l’anàlisi del problema.

Per provar que el màxim s’obté tallant pel punt E, situat a un terç del segment AB, Arquimedes primer comprova que el sòlid que s’obtindria tallant per un punt qualsevol entre E i B seria més petit que tallant per E, i després que tallant el segment AB per un punt entre A i E també s’obtindria un sòlid més petit que tallant per E. (Figures 5 i 6)

Comença la demostració situant en la gràfica (Figura 5) el segment AΓ perpendicular a AB, i pren E de manera que $EB = 2AE$, el punt en que vol demostrar que s’obté el màxim.

Seguidament dibuixa la recta ΓE, i anomena Z el punt d’intersecció amb la recta paral·lela a AΓ que passa per B.

Per Z traça una recta paral·lela a AB, que talla AΓ en un punt que anomena Θ. I també traça un segment paral·lel a AB, i de la mateixa llargada, per Γ, i anomena H el seu extrem.

Per E traça una paral·lela a AΓ que talla ΘZ per un punt que anomena K, i ΓH per un punt que anomena Λ.

Llavors estén ΓH fins a un punt M de manera que es compleixi $\frac{EA}{A\Gamma} = \frac{\Gamma H \cdot HM}{EB^2}$. Per tant, el sòlid que vol demostrar que és màxim serà $BE^2 \cdot EA = \Gamma H \cdot HM \cdot A\Gamma$.

Llavors traça una paràbola de paràmetre HM amb vèrtex a H i eix HZ. Anomena N el punt de tall entre la paràbola i la recta ΓΘ. Seguidament fa passar per B una hipèrbola amb asímptotes ΓN i ΓH. Observa llavors que la hipèrbola i la paràbola passen pel punt K, com veu a l’anàlisi del problema.

Llavors estén el segment ZH fins al punt Ξ de manera que $ZH = H\Xi$. I fa passar per Ξ i K una recta, que talla la recta ΓN en un punt que anomena O.

Justifica a partir de les proposicions 33 del llibre I i 3 del llibre II de les *Còniques* d’Apol·loni, que la recta ΞO és tangent a la paràbola i a la hipèrbola en el punt K.

Aleshores pren un punt qualsevol Σ entre E i B per demostrar que el sòlid tallant AB per Σ serà més petit que tallant AB per E. És a dir $A\Sigma \cdot \Sigma B^2 < AE \cdot EB^2$.

Pel punt Σ traça una paral·lela a AΓ i anomena T el punt de tall amb la hipèrbola, Ψ el punt de tall amb la paràbola, i Y el punt de tall amb ΓH.

Pel punt T traça una paral·lela a AB, que talla la extensió de la recta ΓA en Φ i la extensió de la recta HB en X.

Fa servir la propietat de la hipèrbola mencionada anteriorment, per provar que $\Phi T \cdot TY = AB \cdot BH$, i per tant, restant el rectangle $A\Sigma \cdot \Sigma Y$ a banda i banda, que $\Phi T \cdot T\Sigma = \Sigma B \cdot BH$. A partir de la proposició 43 del llibre I dels *Elements* d'Euclides, pot concloure que llavors la recta que uneix Γ i X passa per Σ.

En el següent pas, utilitza la propietat de la paràbola mencionada anteriorment per observar que $\Psi X^2 = XH \cdot HM$. I com que $TX < \Psi X$, situa un punt Ω al segment HM de manera que $TX^2 = XH \cdot H\Omega$.

Utilitzant que la recta ΓX passa per Σ, per la semblança entre els triangles ΓAΣ i XHΓ, pot afirmar que $\frac{\Sigma A}{A\Gamma} = \frac{\Gamma H}{HX} \Rightarrow \frac{\Sigma A}{A\Gamma} = \frac{\Gamma H \cdot H\Omega}{HX \cdot H\Omega}$, i usant que $TX^2 = XH \cdot H\Omega$ i $TX^2 = B\Sigma^2$, obté que $B\Sigma^2 \cdot \Sigma A = \Gamma H \cdot H\Omega \cdot \Gamma A$.

Com que $H\Omega < HM$, llavors $\Gamma H \cdot H\Omega \cdot \Gamma A < \Gamma H \cdot HM \cdot \Gamma A$. Però $\Gamma H \cdot H\Omega \cdot \Gamma A = B\Sigma^2 \cdot \Sigma A$, i $\Gamma H \cdot HM \cdot \Gamma \mathrm{A} = BE^2 \cdot EA$, i per tant, ha demostrat que $B\Sigma^2 \cdot \Sigma A < BE^2 \cdot EA$, per qualsevol punt Σ a la dreta de E.

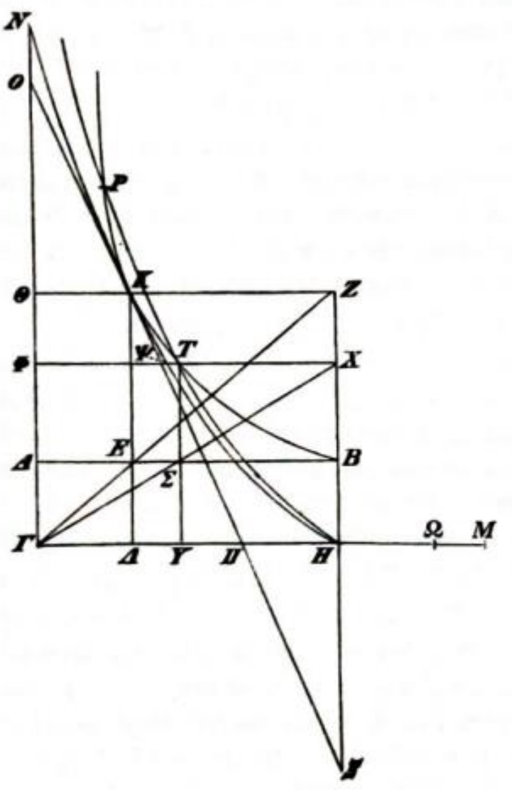


Figura 5. Reproducció del dibuix de la primera part del lema a l'anàlisi [8, p. 642]

Seguidament, d'una manera anàloga, prova que $\mathrm{B}\varsigma^2 \cdot \varsigma A < BE^2 \cdot EA$ per qualsevol punt ς a la dreta de E, i per tant, que el sòlid obtingut tallant el segment AB per E és el màxim de tots.

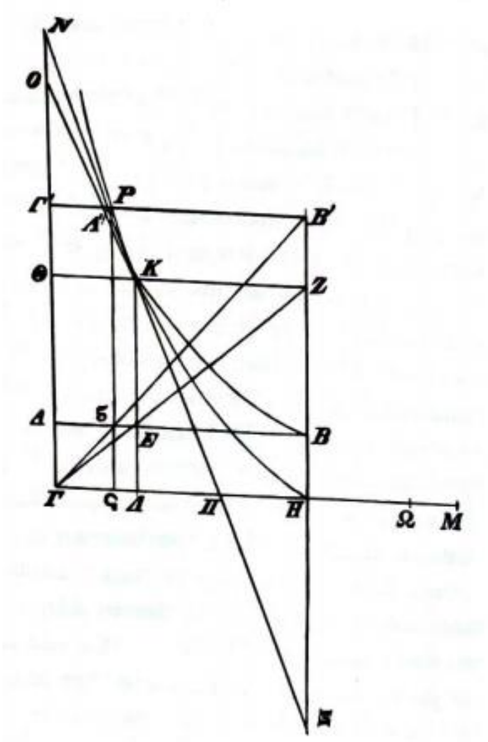


Figura 6. Reproducció del dibuix de la segona part del lema a l'anàlisi [8, p. 645]

Els diagrames que acompanyen aquest lema a l'anàlisi (Figures 5, 6), tenen la particularitat que els segments estan disposats de manera perpendicular, recordant eixos cartesians a l'hora de situar-hi la paràbola i la hipèrbola, tot i que això és una casualitat deguda a la intenció de comparar les àrees dels rectangles formats per aquests segments. En general, les seccions còniques gregues no apareixien disposades amb eixos ortogonals semblants als sistemes de coordenades que utilitzem a l'actualitat.

Al llarg de la demostració, apareixen algunes referències als *Elements* d'Euclides i les *Còniques* d'Apol·loni per justificar certs passos, que es creu que devien ser afegides posteriorment al text d'Arquimedes per Eutoci en escriure el comentari, al tenir en consideració que Apol·loni és posterior a Arquimedes [9].

2.4. Conclusions

En alguns comentaris sobre aquest problema d'Arquimedes, com els de Heath [10], Dijksterhuis [11], o Boyer [12], s'estableix una correspondència entre les construccions geomètriques de la demostració i equacions amb notació actual.

Boyer escriu que la solució s'obté a partir de la intersecció de la paràbola $cx^2 = b^2y$ i la hipèrbola $(c - x)y = cd$.[6] Aquestes expressions s'obtenen anomenant c el segment AB, x el segment EB, d a AΓ i b^2 l'àrea Δ de la figura 4, i reescrivint les proporcions de l'enunciat a la manera actual.

No obstant, veiem que tot i que la paràbola i la hipèrbola es poden escriure amb notació algebraica, el procediment que segueix Arquimedes és totalment geomètric, recolzant-se en la construcció del diagrama, i per tant es perd la idea de la seva demostració si s'escriu amb equacions.

Arquimedes utilitza les propietats geomètriques de la paràbola i la hipèrbola, i la semblança entre triangles per tal de comparar les diferents àrees i sòlids.

En aquesta anàlisi (recollida a l'apèndix A), Arquimedes, no hi dóna explícitament el procediment per trobar el punt del segment que dóna el màxim, sinó que un cop ha afirmat en quin punt s'obté, demostra que és així comparant amb els altres punts a banda i banda del segment. Es tracta d'un mètode que no és general, sinó que està destinat només a resoldre aquest problema concret.

[6] «The solution was carried out by means of the intersection of the parabola $cx^2 = b^2y$ and the hyperbola $(c - x)y = cd$.» [12, p. 120]

3. Sharaf al-Din al-Tusi (c. 1135-c. 1213)

A la seva obra *Àlgebra,* al-Tusi (c. 1135-c. 1213) estudia, utilitzant un llenguatge retòric, les arrels d'equacions de fins a tercer grau. Degut a que només considera equacions amb coeficients positius, aquestes estan classificades en 25 tipus.

Per als cinc tipus que estudia al segon volum, com a primer pas per a trobar el nombre d'arrels i els seus valors, determina el màxim valor que poden adquirir en cada cas.

3.1. Biografia i obres[7]

Sharaf al-Din al-Tusi fou un matemàtic i astrònom nascut a Tus, actual Iran, sobre l'any 1135. No es coneixen molts detalls dels primers anys de la seva vida, però a partir de cites conservades a les biografies dels seus contemporanis es pot reconstruir el seu itinerari per algunes de les ciutats més importants de la seva època. Va ensenyar a Damasc als voltants de l'any 1165, i també va estar a Alep i a Mossul, on va tenir com a estudiant a Kamal al-Din Ibn Yunus (1156-1242), qui més tard va estar ensenyant a Nasir al-Din al-Tusi[8] (1201-1274). Va retornar a l'Iran, on ensenyà a Bagdad, i on va morir cap a l'any 1213.

És conegut pel seu astrolabi lineal [13], que va permetre portar a terme observacions utilitzades per determinar l'alçada d'alguns estels. Tot i que era senzill i econòmic de construir, no era tan precís com d'altres astrolabis i no se'n conserva cap.

El seu treball més important es troba en un manuscrit, que es tracta d'una versió revisada i abreujada per un autor anònim que afirma haver escurçat els passatges més llargs i eliminat taules matemàtiques de càlculs. En aquest tractat, al-Tusi estudia una classificació d'equacions de fins a tercer grau en 25 tipus i proporciona solucions geomètriques per a cadascuna d'elles, donant també procediments per resoldre-les numèricament, i una discussió de l'existència d'arrels per a aquelles que no tenen arrels positives per a qualsevol elecció de coeficients, basada en el càlcul d'un màxim. Aquest treball no ha estat molt estudiat i no se sap amb certesa el seu títol, que s'ha traduït com *"Les Equacions",* però també com *"Àlgebra"*[9] [14, p. 178]. La

[7] [27, pp. 514-516, vol. XIII]

[8] Nasir al-Din al-Tusi (1201-1274) va ser un astrònom, matemàtic i filòsof nascut a Tus, actual Iran. Va rebre educació en medicina, filosofia i matemàtiques. El 1259 va supervisar la construcció d'un observatori astronòmic a Maragha, actual Iran. Allà compilà les taules astronòmiques d'Ilkhani, el seu treball d'astronomia més conegut, que completà el 1272. Es coneixen gairebé 150 tractats i cartes escrites per Nasir al-Din al-Tusi, que tracten diverses branques de les ciències islàmiques: des de l'astronomia a la lògica, la teologia i la filosofia. La seva obra *Tractat sobre el quadrilàter complet*, de 1260, és considerada una de les primeres on la trigonometria és estudiada de manera independent de l'astronomia. Aquest treball també conté l'enunciat de que ara coneixem com el teorema del sinus. [27, pp. 508-514, vol. XIII]

[9] Al llarg del treball em referiré a aquest text com *Àlgebra*, ja que és la traducció més utilitzada del títol als articles i estudis que he pogut llegir sobre aquest.

primera edició moderna, que conté la versió original en àrab i una traducció al francès la va publicar Roshdi Rashed el 1986 a [15][10].

Com que els matemàtics de tradició islàmica només reconeixien coeficients i arrels positives per a les equacions, les de grau menor o igual que 3 estaven separades en 25 tipus. [16] Per exemple, les equacions en notació actual $x^3 + ax^2 + c = bx$ i $x^3 + bx + c = ax^2$, amb $a, b, c > 0$, són de tipus diferents. D'aquests 25 tipus d'equacions, 18 són de grau 3.

Al-Khayyam[11] (1048-1131) havia demostrat que d'aquests 18 tipus de cúbiques, 5 tipus, les que no tenen terme constant, es poden reduir a equacions quadràtiques. Per a les 13 cúbiques restants havia donat una construcció geomètrica d'una arrel a partir de la intersecció de còniques. D'aquests 13 tipus, n'hi ha 8 que tenen arrel positiva per totes les eleccions de coeficients.

3.2. *L'Àlgebra* d'al-Tusi i el càlcul de màxims

Al-Tusi, a la seva *Àlgebra,* com al-Khayyam, també separa les equacions de fins a grau 3 en 25 tipus o classes diferents.

A la primera part de l'*Àlgebra,* al-Tusi estudia la solució de 20 d'aquests tipus, que es corresponen amb equacions que sempre tenen alguna solució positiva per qualsevol elecció de coeficients positius. Per a les cúbiques, proporciona la construcció geomètrica de les arrels donada per al-Khayyam. També descriu un procediment numèric semblant al que ara coneixem com de Ruffini-Horner [13, p. 203] per aproximar-ne les arrels.

Segons Rashed, la segona part de l'*Àlgebra* està dedicada als altres 5 tipus d'equacions, que són totes cúbiques. Depenent del valor (sempre positiu) dels seus coeficients, aquestes equacions poden no tenir cap arrel positiva. Al-Tusi anomena aquests casos "impossibles" [17]. Tot i que al-Khayyam va assenyalar que el nombre d'arrels depèn del nombre d'interseccions entre dues còniques, no va precisar de quina manera. D'acord amb Rashed, Al-Tusi, en canvi, determina la relació entre el nombre d'arrels positives i els coeficients de l'equació, i en dóna l'expressió.

[10] En aquest apartat, el text que he emprat ha estat aquesta traducció de l'*Àlgebra* feta per Rashed. Les traduccions al català són meves a partir d'aquest text.

[11] Segons Rashed [17], fins recentment, s'havia suposat que Omar al-Khayyam, predecessor d'al-Tusi, havia estat el matemàtic medieval que havia tractat de manera més avançada les equacions cúbiques. Omar al-Khayyam (1048-1131) va ser un matemàtic, astrònom i filòsof persa. Les fonts àrabs d'entre el segle XII i XV proporcionen poques referències de la seva vida, que a vegades són contradictòries. Entre les seves obres hi ha un treball d'aritmètica que no s'ha trobat, tractats sobre àlgebra i equacions cúbiques, i una petita obra sobre teoria musical. També va escriure sobre filosofia i poesia, per la qual és molt conegut. Va estar durant gairebé 8 anys a l'observatori d'Isfahan, on va compilar amb altres astrònoms taules astronòmiques, de les quals només se'n conserven una petita porció, i va presentar un pla per reformar el calendari sobre l'any 1079. Va escriure comentaris a la teoria de les línies paral·leles d'Euclides l'any 1077, que juntament amb el seu segon tractat d'àlgebra es considera la seva contribució científica més important. [27, pp. 323-31, vol. VII]

Les equacions de la segona part de l'*Àlgebra*, que al-Tusi va anomenar de tipus 21 a 25, s'escriurien en notació actual com:

Tipus 21: $x^3 + c = ax^2$,

Tipus 22: $x^3 + c = bx$,

Tipus 23: $x^3 + ax^2 + c = bx$,

Tipus 24: $x^3 + bx + c = ax^2$, i

Tipus 25: $x^3 + c = ax^2 + bx, amb\ a, b, c > 0\ per\ a\ tots\ els\ tipus.$

A grans trets, el procediment que segueix al-Tusi per estudiar cada equació és molt similar per als cinc tipus, segons Rashed:

Primerament escriu l'equació de manera que el terme independent, en aquest cas denotat per c, quedi aïllat a una banda de la igualtat, amb la resta dels coeficients a l'altra banda. Com tots els coeficients, i per tant c, han de ser positius, imposa condicions en l'expressió que queda relacionant la x i els altres coeficients, de manera que aquesta expressió sigui positiva.

Un cop fet això, enuncia quin és el valor màxim que pot obtenir l'expressió que ha obtingut en termes de les x, i el demostra.

Tot seguit, afirma que si el terme independent c és més gran que aquest màxim llavors no hi haurà arrel, que si es menor, hi haurà dues arrels, i que si hi és igual, admetrà una sola arrel. [14] Finalment, troba aquestes arrels en funció dels coeficients de l'equació. Cal dir que al-Tusi només considerava les arrels reals positives.

A l'escrit no fa servir notació simbòlica, sinó que tot el procediment i les equacions estan en llenguatge retòric, el que fa que la seva explicació sigui bastant extensa i a vegades complicada de seguir per a un lector actual.

Al-Tusi utilitzava hàbilment el que ara coneixem com transformacions afins per estudiar una equació a partir d'alguna altra ja estudiada. [13] Per exemple, escrit amb notació actual, un cop ha discutit el cas de l'equació de tipus $x^2 + ax = b$, fa notar que en el cas del tipus $ax + b = x^2$, si escriu $x = X + a$, s'obté $X^2 + aX = b$, que es correspon al tipus ja estudiat.

Segons Rashed [17], no es té molta informació sobre l'ús posterior de la teoria d'equacions d'al-Tusi. No es coneix cap treball sobre àlgebra del seu estudiant Kamal al-Din ibn Yunus, però sí una àlgebra d'un estudiant d'aquest, Athir al-din al-Abhari, qui va morir el 1262, on aplica el mètode d'al-Tusi per resoldre l'equació $x^3 = a$. Hi ha altres evidències de l'època que mencionen al-Tusi, però no s'ha descobert cap escrit que pugui indicar que altres matemàtics haguessin continuat la seva teoria d'equacions, ni tampoc es coneix cap comentari sobre la seva àlgebra.

3.3. Màxim de l'equació de tipus 21

A mode d'exemple representatiu, he considerat el procediment d'al-Tusi per estudiar el màxim de l'equació de tipus 21, que defineix com "un cub sumat a un nombre és igual a uns quadrats"[12], i que es podria escriure en termes actuals com $x^3 + c = ax^2$, segons l'explica Rashed. Cal tenir en compte que tots els coeficients i les arrels considerades per al-Tusi són sempre positius; a representa el que anomena els quadrats i c, el nombre.[13]

L'objectiu d'al-Tusi era trobar les arrels d'aquest tipus d'equació, però per fer-ho, primerament en determina el màxim. En notació actual, donada l'equació $x^3 + c = ax^2$, que reescriu de la forma $x^2(a - x) = c$, afirma que el màxim valor per c es troba a $x = \frac{2}{3}a$. Llavors comprova que aquest punt dóna el valor màxim de l'expressió, veient que per punts més grans i més petits que aquesta x, el valor és menor, segons Rashed.

Al-Tusi comença la demostració representant per un segment AB el nombre de quadrats, és a dir, a (Figura 7). Primerament dedueix que per a que el problema no sigui impossible, cal que el nombre de quadrats sigui més gran que l'arrel buscada[14], és a dir $a > x$, ja que:

$$\begin{matrix} x^2x = x^3 \\ x^2a = x^3 + c \end{matrix} \Rightarrow a > x.$$

És a dir, veient que en multiplicar una mateixa quantitat, en aquest cas x^2, per x i per a, obté una quantitat més gran quan es multiplica per a (ja que $c > 0$, i per tant $x^3 + c > x^3$), dedueix llavors que $a > x$. D'altra manera, si $a < x$, no es podria complir que tots els coeficients fossin positius, ja que $c = x^2(a - x)$ seria negatiu, i al-Tusi no considera coeficients ni solucions negatives.

L'arrel buscada, que en notació actual seria la x, la representa amb el segment BC. Al-Tusi situa aquests punts en una figura, que permet visualitzar els segments.(Figura 7)

[12] «Un cube plus un nombre égalent des carrés.» [15, pp. 1, vol. II]

[13] Tot i que Arquimedes no empra notació algebraica i ho soluciona de forma geomètrica, si s'expressa en termes actuals l'expressió que maximitza a l'apèndix del segon llibre *Sobre l'esfera i el cilindre* (el problema desenvolupat al punt 2.4 del treball), s'obté una equació de tipus 21. El problema d'Arquimedes consistia en trobar el punt pel qual s'ha de tallar un segment de manera que el sòlid obtingut, prenent una part com a alçada i l'altra com a costat del quadrat que en seria la base, tingués unes dimensions donades. Si anomenem a la llargada del segment i x el punt de tall, s'obté que el volum del sòlid del problema d'Arquimedes serà $c = (a - x)x^2$. Com a i c són positius, es pot escriure com una equació de tipus 21. Al-Tusi, però, no fa cap referència a Arquimedes en la resolució. De fet, l'obra d'Arquimedes és del segle III aC, mentre que la d'al-Tusi és del segle XII dC.

[14] «Puisque si on multiplie le carré par la racine cherchée il vient le cube seulement, et si on le multiplie alors par le nombre des carrés, on a le cube plus le nombre, il faut donc que le nombre des carrés soit plus grand que la racine cherchée.» [15, pp. 1, vol. II]

Llavors al-Tusi reformula l'equació, dient que és equivalent a que "la recta AB, que és el nombre de quadrats, se separi en dues parts tals que el producte del quadrat d'una per l'altra sigui igual al nombre"[15], el que escriuríem amb notació actual com $x^2(a-x)=c$.

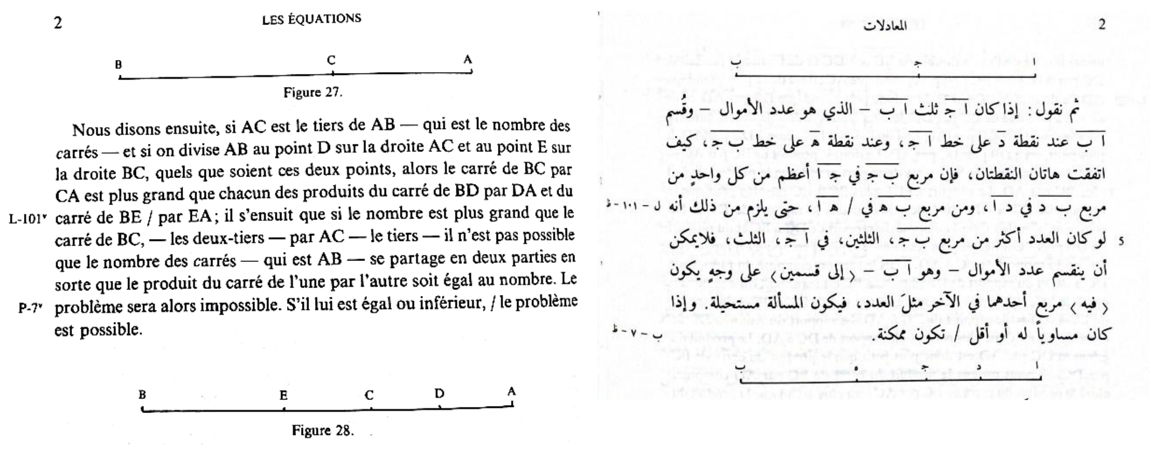

2 LES ÉQUATIONS

Figure 27.

Nous disons ensuite, si AC est le tiers de AB — qui est le nombre des carrés — et si on divise AB au point D sur la droite AC et au point E sur la droite BC, quels que soient ces deux points, alors le carré de BC par CA est plus grand que chacun des produits du carré de BD par DA et du
L-101r carré de BE / par EA ; il s'ensuit que si le nombre est plus grand que le carré de BC, — les deux-tiers — par AC — le tiers — il n'est pas possible que le nombre des carrés — qui est AB — se partage en deux parties en sorte que le produit du carré de l'une par l'autre soit égal au nombre. Le
P-7r problème sera alors impossible. S'il lui est égal ou inférieur, / le problème est possible.

Figure 28.

2 المعادلات

ثم نقول: إذا كان ا ج ثلث ا ب – الذي هو عدد الأموال – وقُسم ا ب عند نقطة د على خط ا ج، وعند نقطة ه على خط ب ج، كيف اتفقت هاتان النقطتان، فإن مربع ب ج في ج ا أعظم من كل واحدٍ من مربع ب د في د ا، ومن مربع ب ه في / ه ا، حتى يلزم من ذلك أنه ل - ١٠١ - ظ
لو كان العدد أكثر من مربع ب ج، الثلثين، في ا ج، الثلث، فلايمكن أن ينقسم عدد الأموال – وهو ا ب – ‹إلى قسمين› على وجهٍ يكون ‹فيه› مربع أحدهما في الآخر مثلَ العدد، فيكون المسألة مستحيلة. وإذا كان مساوياً له أو أقل / تكون ممكنة. ب - ٧ - ظ

Figura 7. Fragment de l'estudi de l'equació de tipus 21 a l'*Àlgebra* [15, p. 2]

Seguidament fa l'afirmació que si AC és un terç d'AB, llavors havent pres un punt D sobre la recta AC i un punt E sobre la recta BC, seguint la disposició de la figura 7, es complirà que:

$$BC^2 \cdot CA > BD^2 \cdot DA$$
$$BC^2 \cdot CA > BE^2 \cdot EA$$

En notació actual, fixant $x^* = BC = \frac{2}{3}AB$, es correspon amb afirmar que prenent qualsevol $x_1 = BD$ i $x_2 = BE$, amb $0 < x_2 < x^* < x_1 < a$, es tindrà que:

$$x^{*2}(a-x^*) > x_1^2(a-x_1)$$
$$x^{*2}(a-x^*) > x_2^2(a-x_2)$$

És a dir, que $x^* = \frac{2}{3}a$ dóna el màxim per a $x^2(a-x)$.

Tot seguit esmenta que si el nombre, c, és més gran que $BC^2 \cdot AC$, el problema serà impossible, però que si és igual o inferior, llavors és possible.[16] I a continuació demostra les dues desigualtats.

Per demostrar-ho, primer prova que $BC^2 \cdot AC > BD^2 \cdot DA$ i després que $BC^2 \cdot AC > BE^2 \cdot EA$, com s'escriuria amb notació actual. Per obtenir aquestes desigualtats, utilitza substitucions per

[15] «C'est donc une nécessité dans ce problème que la droite AB – qui est le nombre des carrés – se partage en deux parties telles que le produit du carré de l'une par l'autre égale le nombre.» [15, pp. 1, vol. II]

[16] «Le carré de BC par CA est plus grands que chacun des produits du carré de BD par DA et du carré de BE par EA; il s'ensuit que si le nombre est plus grand que le carré de BC, - les deux-tiers – par AC – le tiers - il n'est pas possible que le nombre des carrés – qui est AB – se partage en deux parties en sorte que le produit du carré de l'une par l'autre soit égal au nombre. Le problème sera alors impossible. S'il lui est égal ou inférieur, le problème est possible.» [15, pp. 1, vol. II]

les àrees dels quadrats generats pels diferents segments i restes entre aquestes àrees fins arribar a la desigualtat proposada, segons Rashed.

Per provar la primera desigualtat, comença observant que ambdós termes es poden expressar com:

$$BC^2 \cdot AC = BC^2 \cdot AD + BC^2 \cdot DC \qquad (1)$$

$$BD^2 \cdot DA = BC^2 \cdot AD + (BD^2 - BC^2) \cdot AD \qquad (2)$$

Restant $BC^2 \cdot DA$ a (1) i a (2), obté que ha de comparar:

$$BC^2 \cdot AC - BC^2 \cdot DA = BC^2 \cdot DC \qquad (1')$$

$$BD^2 \cdot DA - BC^2 \cdot DA = (BD^2 - BC^2) \cdot AD \qquad (2')$$

Seguidament observa que

$$BD^2 - BC^2 = (DB + BC) \cdot DC \qquad (3)$$

$$BC = 2 \cdot AC \Rightarrow BC^2 = 2 \cdot BC \cdot AC = 2 \cdot BC \cdot AD + 2 \cdot BC \cdot DC \qquad (4)$$

$$(DB + BC) \cdot AD = 2 \cdot BC \cdot AD + DC \cdot AD \qquad (5)$$

Resta $2 \cdot BC \cdot AD$ a les expressions (4) i (5):

$$BC^2 - 2 \cdot BC \cdot AD = 2 \cdot BC \cdot DC \qquad (4')$$

$$(DB + BC) \cdot AD - 2 \cdot BC \cdot AD = DC \cdot AD \qquad (5')$$

Utilitza que $BC > AC \Rightarrow BC > AD$, i per tant compara (4') i (5'), afirmant que $2 \cdot BC \cdot DC > DC \cdot AD$.

Suma una altra vegada a banda i banda $2 \cdot BC \cdot AD$, per comparar (4) i (5), i llavors obté $2 \cdot BC \cdot CA = 2 \cdot BC \cdot AD + 2 \cdot BC \cdot DC > 2 \cdot BC \cdot AD + DC \cdot AD = (DB + BC) \cdot AD$.

I per tant, $BC^2 > (DB + BC) \cdot AD$.

I seguidament ho considera en forma de raons[17]:

$$\frac{DB + BC}{BC} < \frac{BC}{AD}$$

Multiplicant a banda i banda per $\frac{DC}{BC}$, obté la relació $\frac{DC \cdot (DB+BC)}{BC^2} < \frac{DC}{AD}$, i utilitzant (3):

$$(BD^2 - BC^2) \cdot AD < BC^2 \cdot DC.$$

[17] «Le rapport de DB plus BC à BC est plus petit que le rapport de BC à AD.» [15, pp. 3, vol. II]

Sumant a ambdues bandes el terme comú $BC^2 \cdot AD$, obté la desigualtat que buscava inicialment:

$$BC^2 \cdot AC > BD^2 \cdot DA.$$

D'una manera anàloga demostra la desigualtat per a un punt E, pres entre C i A, $BC^2 \cdot AC > BE^2 \cdot EA$, començant amb les igualtats

$$BC^2 \cdot AC = BE^2 \cdot AC + (CB + BE) \cdot EC \cdot AC, \text{ i}$$

$$BE^2 \cdot AE = BE^2 \cdot CE + BE^2 \cdot AC.$$

I d'aquesta manera afirma que s'ha demostrat que el màxim sòlid que es pot obtenir a partir del quadrat d'una de les parts multiplicada per l'altra és tallant el segment de forma que la primera part sigui el doble que l'altra, segons Rashed.[18]

3.4. Conclusions

Segons Rashed, a la segona part del seu llibre l'*Àlgebra,* al-Tusi estudia, d'entre les 25 classes en que ha dividit les equacions de grau menor o igual a 3, els 5 tipus d'equacions cúbiques que poden no tenir arrels positives segons l'elecció dels coeficients (tipus 21 a 25). Per estudiar els límits de la solubilitat i el nombre d'arrels positives d'aquests 5 tipus d'equacions, en busca primerament el màxim. D'aquesta manera si el màxim és més gran que el terme independent no hi haurà cap solució, si és menor n'hi haurà dues, i si el màxim de l'expressió i el terme independent són iguals, llavors hi haurà una única solució.

Per a al-Tusi, doncs, l'estudi dels màxims de les equacions no està motivat per un problema geomètric, com era el cas del màxim estudiat per Arquimedes, sinó que és el primer pas de l'estudi posterior de les arrels de cadascun dels tipus d'equacions. Per aquest motiu, la demostració no està tan lligada a obtenir aquest màxim de forma geomètrica.

La demostració és en aquest cas més bé algebraica, donat que consisteix en la manipulació i comparació de productes a partir dels segments que representen els coeficients, sense fer massa ús de figures, que semblen només complementar la demostració.

Segons Netz a [14, p. 180], al-Tusi no havia estat l'únic matemàtic àrab en tractar aquesta equació[19], però és l'únic d'entre ells que en determina el màxim, degut al seu procediment per obtenir les condicions de solubilitat i el nombre d'arrels.

[18] «On a donc montré que le produit du carré de BC – les deux-tiers – par AC – le tiers – est le plus grand solide qu'on puisse obtenir du produit du carré de l'une des deux parties de AB par l'autre partie.» [15, pp. 4, vol. II]

[19] Aquesta equació s'obté en plantejar de manera algebraica la segona part de la proposició 4 del segon llibre de *Sobre l'esfera i el cilindre* d'Arquimedes, que era un problema geomètric. El tractat de *Sobre l'esfera i el cilindre* es va transmetre de forma conjunta amb els comentaris d'Eutoci a Europa al segle XIII, a partir de còpies d'un mateix còdex. Però les traduccions a l'àrab, datades d'abans del segle IX, no anaven

De la mateixa manera que en el cas d'Arquimedes, al-Tusi no explica el procediment per determinar el màxim de l'expressió, segons Rashed. Primerament enuncia el punt en el qual s'assoleix el màxim, i tot seguit demostra que és aquest. Ho fa comparant el valor de l'equació que s'obté en aquest punt amb el que s'obtindria als punts presos a una i altra banda del segment que representa el valor a partir del qual s'obté el màxim.

acompanyades del comentari d'Eutoci, que afegia l'apèndix on Arquimedes donava la demostració d'aquesta part del problema.

Alguns matemàtics àrabs van intentar donar la solució per completar el text d'Arquimedes, que consistia en tallar un segment de manera que les parts es trobessin en una certa proporció. Es té constància que al-Mahani al segle IX, al-Khazin i al-Quhi al segle X, Abu al-Jud i Ibn al-Haytham entre els segles X i XI, Omar al-Khayyam entre els segles XI i XII, i Sharaf al-Din al-Tusi al segle XII intentessin resoldre aquesta equació a la que portava el problema d'Arquimedes. Tot i això, al-Tusi, no menciona Arquimedes en el text, i tracta aquesta equació juntament amb les dels altres tipus. [14, pp. 130-1]

4. Johannes Kepler (1571-1630)

L'any 1615, Johannes Kepler va publicar *Nova stereometria doliorum vinariorum* (Nova estereometria dels barrils de vi). En aquesta obra estudia els volums de diversos sòlids de revolució.

El seu objectiu era comprovar la validesa del mètode utilitzat a la seva època per mesurar la capacitat dels barrils de vi. Això el va portar a buscar, d'entre tots els barrils que tinguin la mateixa diagonal, quines són les proporcions del que pot contenir el màxim de vi. Aproximant la forma dels barrils a la d'un cilindre, va trobar aquestes proporcions òptimes a partir de càlculs numèrics, i llavors va demostrar que la relació obtinguda entre el diàmetre de la base i l'alçada del cilindre és la que proporciona el màxim volum.

4.1. Biografia[20]

Johannes Kepler va ser un físic i astrònom alemany, nascut el 1571 a Weil der Stadt, una petita població del ducat de Württemberg, a Alemanya. Avui en dia és principalment recordat per les tres lleis dels moviments planetaris que porten el seu nom.

Va estudiar a l'escola primària alemanya de Leonberg, i posteriorment a l'escola llatina. Amb 13 anys continuà els seus estudis al Seminari Elemental de Adelberg, i seguidament a l'escola preparatòria de Maulbronn. El 1589 inicià els seus estudis universitaris a Tübingen. En aquesta etapa, va poder llegir diverses obres d'Aristòtil i va ser atret per les idees de Plató i la matemàtica pitagòrica. Tot i això el seu gran mestre va ser Michael Mästlin, el seu professor de matemàtiques i astronomia, que l'introduí a les idees copernicanes.

El 1594, un cop graduat, es traslladà a Graz, Àustria per ser professor de matemàtiques. Allà també tenia com a obligació realitzar un calendari astrològic anual i prediccions, horòscops, gràcies als quals va adquirir certa fama, i que li varen aportar alguns ingressos.

Després de casar-se el 1597, es traslladà amb la seva família a Praga l'any 1600, per treballar amb Tycho Brahe (1546-1601), qui treballava per la cort de Rodolf II i havia passat els últims 20 anys recollint dades astronòmiques a l'observatori de Benatky. Quan Brahe va morir el 1601, Kepler va ocupar la seva posició com a matemàtic imperial, i va continuar el seu estudi recopilant dades per les taules del moviment planetari per estudiar les òrbites dels planetes. El 1611 la seva dona i un dels seus fills van caure malalts i van morir. Kepler va romandre a Praga fins l'any següent, quan va morir Rodolf II, en què marxà a Linz, on va exercir de matemàtic territorial. Allà es va casar per segona vegada el 1613.

Posteriorment es traslladà a Ulm, tot i que al cap d'un temps tornà a Praga i més tard, el 1628 es traslladà a Sagan, on va treballar pel cap de l'exèrcit imperial. El 1630 viatjà a Leipzig, i d'allà a Ratisbona, però va caure malalt i va empitjorar durant unes setmanes fins la seva mort aquell mateix any.

[20] [27, pp. 289-312, vol. VII], [19]

Va ser una persona profundament religiosa, i va intentar dedicar la seva vida a la veritat absoluta, preocupat per interpretar l'Univers a partir de l'harmonia matemàtica.

4.2. Obres[21]

El 1596, mentre vivia a Graz, va escriure *Mysterium cosmographicum*, en què exposava una teoria que descrivia una estructura geomètrica per al Sistema Solar, suposant que les òrbites dels planetes al voltant del Sol es trobaven sobre esferes inscrites i circumscrites en els cinc poliedres regulars. Tot i que la idea principal de l'obra era errònia, algunes primeres observacions de les òrbites semblaven donar-li validesa.

Mentre era a Praga, va escriure *De Stella nova*, publicada el 1606, una obra que tenia la finalitat d'estudiar i descriure l'aparició al cel d'una nova estrella el 1604 a pocs graus de Júpiter, Saturn i Mart, que es coneix actualment com la nova de Kepler. Allà també hi va escriure *Astronomia nova,* que es va publicar el 1609, on exposa les que ara es coneixen com les dues primeres lleis de Kepler: que les òrbites dels planetes són el·líptiques, i que l'àrea recorreguda per la recta que uneix els punts de l'òrbita amb el Sol és sempre la mateixa per a un interval de temps donat.

A partir de les seves observacions d'un eclipsi el 1600 va desenvolupar un interès per l'òptica. Va definir el concepte de raig de llum, va estudiar la diferència entre l'angle incident i l'angle de refracció, i es considera que va ser la primera persona en demostrar que les imatges es formen a la retina. Publicà aquests resultats el 1604, a *Astronomiae pars òptica*, i a *Dioptrice,* de 1611, on va descriure les lents, incloent un nou tipus de telescopi astronòmic que utilitzava dues lents convexes.

El 1615 va publicar *Nova stereometria doliorum vinariorum*. A la introducció, explica que aquest llibre va ser motivat degut als dubtes que tenia sobre el mètode que aplicaven els comerciants austríacs per mesurar la quantitat de vi que hi havia als barrils. En aquest treball, estudia també els volums de diversos sòlids de revolució. Un any més tard va publicar una versió reorganitzada d'aquesta obra en alemany. És en aquesta obra on Kepler demostra quin és el cilindre de màxima capacitat d'entre tots els que tenen la mateixa diagonal.[22]

El 1618 publicà *Harmonice mundi.* És una obra composta de cinc volums que completa l'obra *Mysterium Cosmographicum,* on desenvolupa la seva teoria de l'harmonia en 4 àrees: la geometria, la música, l'astrologia i l'astronomia. En aquesta obra és on apareix la tercera llei de Kepler, que fa referència a que els quadrats dels períodes dels planetes són proporcionals als cubs de les seves distancies mitjanes al Sol.

Kepler va llegir sobre els logaritmes de John Napier (1550-1617) i va crear taules logarítmiques, que va publicar, també amb exemples del seu ús entre 1624 i 1625.

[21] [27, pp. 289-312, vol. VII], [19], [2, pp. 108-116]

[22] Aquesta obra serà l'objecte d'estudi en aquesta secció.

Dedicà molts anys de treball a elaborar les *Tabulae Rudolphinae*, publicades el 1627, on completà les observacions planetàries de Tycho Brahe. Aquestes taules permetien calcular la posició dels planetes en qualsevol moment del passat o el futur amb l'ajuda de les taules de logaritmes, i donaven resultats molt més precisos que d'altres amb mètodes anteriors. Van permetre predir trànsits de Mercuri i Venus davant el disc solar el 1931, tot i que Kepler no va poder arribar a veure'ls.

El 1628 va portar a la impremta l'obra *Somnium seu astronomia lunari*, que havia escrit el 1609 com un relat de fantasia d'un viatge a la Lluna i de la descripció dels moviments celestes vists des d'allà.

Kepler va ser dels primers matemàtics del segle XVII en abandonar l'estructura formal de les demostracions arquimedianes i introduir l'ús dels infinitesimals en la determinació d'àrees i volums. Molts dels problemes astronòmics que es va proposar resoldre es podrien solucionar actualment amb càlcul integral, i en alguns casos va poder resoldre'ls a partir de sumatoris.

4.3. *Nova stereometria doliorum vinariorum* i el barril de màxima capacitat

Per la celebració del seu segon casament el 1613, Kepler va comprar diversos barrils de vi. Va decidir escriure *Nova stereometria* [18] degut a una anècdota que explica a la dedicatòria del llibre:[23]

> Així doncs, quatre dies després d'haver portat a casa uns barrils de vi, va arribar el venedor amb una vara mesuradora, amb la que va començar a avaluar indiscriminadament tots els barrils, sense tenir en compte la seva mida, i sense cap altre raonament o càlcul.
>
> Únicament es limitava a introduir la punta de bronze de la vara per l'orifici de sortida del barril ple, inclinada fins arribar a la part inferior d'un dels discs de fusta que serveixen de bases al barril, ja que aquesta distància de la cima del ventre del barril a qualsevol de les bases és la mateixa. En veure la marca del vi en el número imprès a la vara, pronunciava el nombre d'àmfores que contenia el barril, i a partir d'aquest número donava el preu del vi contingut. Jo no me'n sabia avenir: com amb una sola línia transversal, portada des de la meitat a través del cos del barril, es podia mesurar la seva capacitat. Dubtava d'aquest canvi de dimensió. […]
>
> A aquest respecte, no vaig considerar inconvenient començar un nou treball matemàtic per explorar els fonaments, si es que n'hi havia algun en aquest cas, segons les lleis geomètriques.[24]

---

[23] Traduïda a partir de [19].

[24] «Dolijs igitur aliquot domum illatis & conditis, post dies quatuor venit venditor cum virga mensoria, qua vnâ & eâdem cados promiscuè omnes exploravit sine discrimine, sine respectu figurae, sine ratiocinatione vel calculo. Demissa enim acie virgae aeneâ in orificium infusorium pleni cadi transversim ad calcem vtriusque orbis lignei, quos fundos vernaculo vsu dictitamus, postquàm vtrinq; aequalis apparuit haec

Kepler fa notar que dos barrils amb la mateixa diagonal poden tenir volums diferents, depenent de la seva alçada i diàmetre de la base. A la figura 8, la vara mesuradora utilitzada pels venedors de vi es correspondria amb els segments az o ac, i el diàmetre de la base estaria representat per el segment gc.

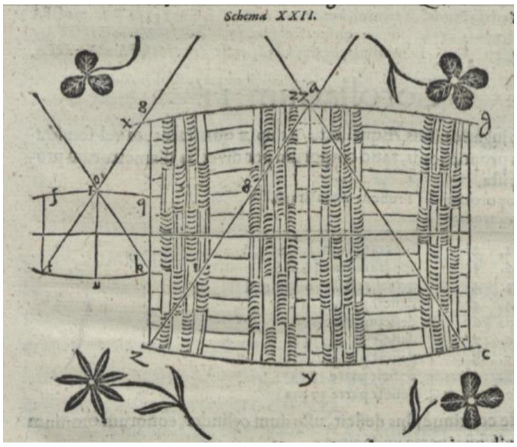


Figura 8. Dibuix d'un barril de vi a *Nova stereometria* (1615) [18]

Després del seu estudi a *Nova stereometria,* Kepler acaba justificant l'ús de la vara graduada per calcular el volum del vi al barril, veient que per a barrils semblants, el volum augmenta proporcionalment al cub de la diagonal que mesura la vara. [19] [20] A més remarca que els barrils austríacs tenien unes proporcions molt properes a les que donen el màxim volum quan la diagonal està fixada, mentre que els de la zona del Rin eren més estrets i alts i no hi serviria la mateixa graduació de la vara per mesurar la quantitat de vi que contenien. [21]

El llibre està dividit en tres parts: la primera part, formada per 30 teoremes, conté part de l'estereometria d'Arquimedes, tractant cercles, esferes, cons i cilindres i les seves relacions mètriques, juntament amb un suplement que conté 92 sòlids no tractats per Arquimedes. La segona part, formada per 29 teoremes, està dedicada a la mesura dels barrils de vi austríacs, i la tercera part a aplicacions dels teoremes demostrats. [1, pp. 106-111]

Els sòlids que Kepler afegeix als ja estudiats per Arquimedes, els obté fent rotar segments de seccions còniques al voltant de diferents eixos. Entre els sòlids que estudia a la primera part del llibre, hi ha esferes, tors, esferoides i conoides, però també d'altres als que va anomenar pomes o llimones i prunes, entre d'altres, segons la seva forma. [22, pp. 192-197] A la figura 9 es poden veure els sòlids obtinguts a partir de la rotació d'un cercle, que Kepler anomena anell (I), anell estricte (II), poma (III), esfera (IV) i llimona (V), seguint la numeració de la figura.

longitudo à ventris summo ad vtriusq; circularis Tabulae imum: de nota numeri, quae erat impressa virgae eo loco, quo desinebat haec longitudo, pronunciavit numerum amphorarum, quos caperet cadus: secundum quem numerum ratio fuit inita precij.

Mirari ego, si transversa linea per corpus dimidij cadi ducta argumentum esse posset capacitatis; dubitare etiam de fide huius dimensionis; […]

Visum est non inconveniens, novum Mathematicorum laborum principium, certitudinem huius compendiosae, & ad rem familiarem pernecessariae dimensionis ad leges Geometricas explorare, fundamentaq;, si quae essent, in lucem proferre.» [18]

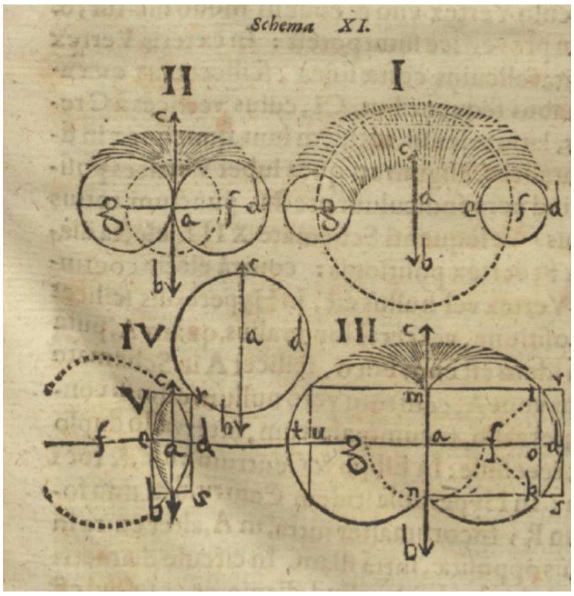


Figura 9. Diferents sòlids obtinguts a partir de la rotació d'un cercle al voltant d'un eix a *Nova stereometria* (1615) [18]

La manera com Kepler aborda el problema de la mesura d'aquests sòlids és considerant les superfícies i volums com compostos per elements infinitesimals de la mateixa dimensió, tot i que ocasionalment els anomena com indivisibles[25], i sumant les superfícies o volums d'aquestes parts, troba la del sòlid més gran.

L'ús de tècniques amb indivisibles va ser popularitzat per Bonaventura Cavalieri (1598-1647), que vint anys més tard de la publicació de la *Nova stereometria doliorum vinariorum* de Kepler, va publicar *Geometria indivisibilibus* el 1635 i posteriorment *Exercitationes geometricae sex* el 1647.[26]

Tot i això, els mètodes de Cavalieri eren diferents dels de Kepler. Cavalieri establia una correspondència entre els elements indivisibles de dues figures geomètriques, observant que si es trobaven en una ràtio donada, les àrees o volums d'aquestes figures també estarien en aquesta ràtio. En general, considerava els indivisibles de dimensió menor que la de la figura inicial, com seria, per exemple, una àrea composta per segments paral·lels. En canvi, Kepler havia considerat, en general, elements infinitesimals de la mateixa dimensió que la figura inicial, i en sumava les àrees o volums per obtenir-ne els de la figura inicial. [23] [24]

A la segona part de *Nova stereometria*, per tal d'estimar la relació entre les dimensions i la capacitat dels barrils, Kepler acaba resolent un problema de màxims per trobar, d'entre tots els barrils amb la mateixa diagonal, quina relació entre l'alçada i el diàmetre de la base ha de tenir el de màxima capacitat. Per fer-ho, fa una aproximació de la forma dels barrils a cilindres, i estudia, llavors, quines són les proporcions que ha de tenir el cilindre de màxima capacitat, d'entre tots els que fan la mateixa diagonal.

---

[25] Es pot trobar més informació sobre els infinitesimals i indivisibles a principis del segle XVII a [2, pp. 108-148]

[26] Veure [24]

Per tal d'obtenir una idea de quines seran les proporcions òptimes per a aquests cilindres, Kepler fa una taula que li serveix per comparar els volums dels cilindres segons les seves proporcions. (Figura 10)

A la taula, Kepler no dóna els volums de cilindres, sinó d'ortoedres de base quadrada, tots amb la mateixa diagonal a la cara lateral. El volum de cadascun d'aquests ortoedres serà proporcional (amb una raó π) al dels cilindres d'igual alçada inscrits en ells, que tindran per diàmetre de la base el costat de la base dels ortoedres. A la primera columna de la taula, dóna l'alçada, a la segona el diàmetre de la base, i a la tercera, el volum corresponent dels ortoedres.

Per construir la taula, fixa 20 com la diagonal de la cara lateral, i dóna el volum dels ortoedres per a totes les alçades enteres entre 1 i 20, amb el costat de la base corresponent. A més de per a aquestes alçades enteres, també dóna el volum per quan l'alçada i la base es troben en raó sub-semi-doble (és a dir, quan l'alçada és igual a $\frac{1}{\sqrt{2}}$ vegades la base, que es correspon als valors $20\sqrt{\frac{2}{3}}$ i $\frac{20}{\sqrt{3}}$ respectivament), i per quan són iguals, que es correspon amb una base i una alçada de $10\sqrt{2}$.

Altitudo	Basis diametri	Erit corpus columnæ
1	20--	399
2	20--	794
3	20--	1173
4	20--	1536
5	19+	1875
6	19+	2184
7	19--	2457
8	18+	2688
9	18--	2871
10	17+	3000
11	17--	3069
Sub se-	midupla	3080
12	16.	3072
13	15+	3003
14	14+	2856
Æqu-	ales	2828
15	13+	2625
16	12.	2364
17	11--	1887
18	8+	1368
19	6+	741
20	0.	0

Figura 10. Taula que recull els volums segons l'alçada i diàmetre de la base a *Nova stereometria* (1615) [18]

El volum màxim recollit a la taula, 3080, es troba quan la raó entre l'alçada i el costat de la base de l'ortoedre és de $\frac{1}{\sqrt{2}}$, marcat a la taula com "Sub semidupla". Això es correspon a que la raó entre l'alçada i el diàmetre de la base del cilindre sigui $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

A partir de les observacions dels volums de la taula, Kepler fa notar que "prop del màxim els decrements a ambdues bandes són, al principi, imperceptibles". [27]

La diferència entre el volum màxim (a la fila 12 de la taula) i el de la fila immediatament superior i inferior és de 11 i 12 unitats, respectivament, però la diferència entre els volums d'aquestes files i les següents és de 69 unitats, considerablement més elevada.

A partir d'aquestes observacions, Kepler enuncia, al teorema V de la segona part de *Nova stereometria*, que:

> De tots els cilindres d'igual diagonal, el de major volum és aquell en el que la raó del diàmetre bàsic a l'alçada és la proporció semi-doble, o com la diagonal del quadrat del cub és a l'aresta del cub.[28]

Amb proporció semi-doble, Kepler es refereix a que la ràtio entre el diàmetre de la base i l'alçada és $\sqrt{2}$.

Kepler demostra aquest teorema de forma geomètrica, a partir de l'esquema de la figura 11, que reutilitza de la demostració del teorema I. Per als esquemes utilitza lletres en minúscula per determinar els punts, però a la demostració s'hi refereix amb majúscules. No utilitza símbols per expressar les relacions i operacions sinó que les escriu de manera retòrica.

En la demostració, redueix el problema a dues dimensions, considerant els rectangles obtinguts en intersecar els cilindres pel pla que passa pel seu eix.

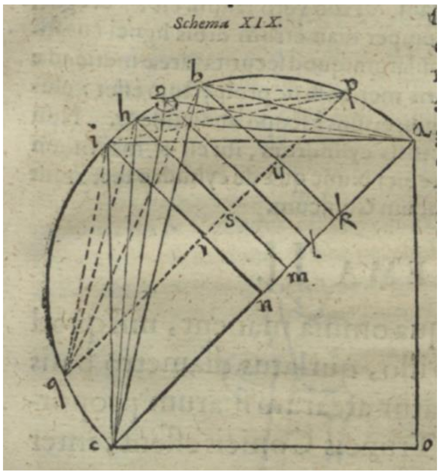


Figura 11. Esquema que acompanya el Teorema I a *Nova stereometria* (1615) [18]

Per tal de comparar tots els rectangles que tenen la mateixa diagonal, pren un segment, que anomena ca, com aquesta diagonal fixa, i l'utilitza com a diàmetre d'una semicircumferència.

[27] «Circa maximam verò utrinque circumstantes decrementa habet initio insensilia.» [18] (Traduït a partir de [22])

[28] «Omnium Cylindrorum, diagonium eandem habentium, maximus & capacissimus est is, cujus diameter Basis, est ad altitudinem in proportione semidupla, seu vt latus Tetraedri aut diagonios quadrati cubici ad latus cubi in eadem sphaera.» [18] (Traduït a partir de [19])

D’aquesta manera, tots els rectangles que tinguin diagonal ca tindran un vèrtex situat sobre aquesta semicircumferència. Els segments entre el punt c i els punts sobre la semicircumferència representen el diàmetre de la base del cilindre, i els segments entre el punt sobre la semicircumferència representen l’alçada del cilindre, com es veu a la figura 12.

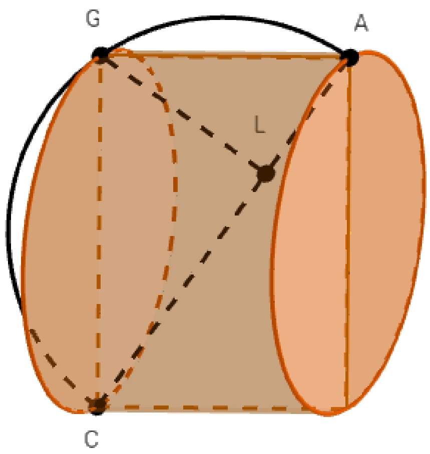


Figura 12. Cilindre màxim, obtingut a partir del rectangle de vèrtexs c, g i a. [Elaboració pròpia amb GeoGebra]

Comença la demostració del teorema situant un punt l al segment ca de manera que $cl = \frac{2}{3}ca$. D’aquesta manera, la intersecció de la perpendicular a ac pel punt l amb el semicercle, que anomena g, compleix $gc^2 = 2ag^2$, com escriuríem amb notació actual.[29]

Per demostrar aquesta relació, Kepler utilitza que $\frac{ca}{la} = \frac{ca^2}{ag^2}$. (1)

Aquesta relació es pot veure usant el teorema dels catets i substituïnt ag^2 a $\frac{ca^2}{ag^2}$, ja que $ag^2 = ca \cdot la \Rightarrow \frac{ca^2}{ag^2} = \frac{ca^2}{ca \cdot la} = \frac{ca}{la}$.

Com ha definit $ca = 3la$, llavors pot afirmar, a partir de la igualtat (1), que $ca^2 = 3ag^2$.

I per tant, amb l‘observació que $ca^2 = ag^2 + gc^2$ i el fet que $ca^2 = 3ag^2$, dedueix que $gc^2 = ca^2 - ag^2 = 3ag^2 - ag^2$, i per tant, $gc^2 = 2ag^2$.

És fàcil veure que gc i ga es troben en el que Kepler anomena proporció semi-doble, ja que $\frac{gc}{ag} = \sqrt{2}$.

Kepler afirma que d’entre tots els cilindres de diagonal ac, el que té diàmetre de la base gc i alçada ga és el de màxima capacitat.[30]

[29] «Quadratum GC duplum erit quadrati AG.» [18]

[30] «Dico Cylindrum, cuius diameter baseos est GC, altitudo GA, ese omnium Cylindrorum, quibus est haec diagonios AC, capacissimum, seu maximo corpore.» [18]

Seguidament, utilitzant l'esquema de la figura 11, compara els volums dels cilindres que s'obtindrien prenent com a vèrtexs sobre la semicircumferència corresponents punts qualsevols h i b, l'un a l'esquerra i l'altre a la dreta de g respectivament.

Utilitzant les propietats dels triangles, amb el que coneixem com teorema de l'altura i dels catets, i comparant les proporcions, comprova que els cilindres que intersequen en els punts h i b la semicircumferència tenen un volum menor que el que la interseca en el punt g.

D'aquesta manera arriba a la conclusió que el diàmetre de la base i l'alçada del cilindre de màxim volum per una diagonal constant estan en proporció semidoble.

Actualment, podríem resoldre aquest problema utilitzant el càlcul diferencial:

> Donat un cilindre qualsevol, si anomenem $b = gc$ el diàmetre de la base i $h = ag$ l'alçada, el volum en funció d'aquests paràmetres seria $V(b, h) = \pi \left(\frac{b}{2}\right)^2 h$.
>
> Es pot escriure en termes de la seva diagonal d, i l'alçada, utilitzant que $d^2 = b^2 + h^2$, i per tant, $V(d, h) = \frac{\pi}{4}(d^2 - h^2)h$.
>
> Si busquem el de màxim volum per a tots els que tenen diagonal constant, derivant aquesta expressió respecte h i igualant-la a zero obtenim que $d^2 = 3h^2$, i substituint-hi b, obtenim que $b^2 = 2h^2$, i per tant, $\frac{b}{h} = \sqrt{2}$, que és el resultat al qual havia arribat Kepler.

4.4. Conclusions

L'objectiu de Kepler a la segona part de *Nova stereometria doliorum vinariorum* és comprovar si el mètode que utilitzen els mercaders per mesurar el volum de vi contingut en un barril és vàlid, independentment de la seva mida i proporcions. D'aquesta manera, per trobar la proporció entre les dimensions que ha de tenir un barril, un cop fixada la seva diagonal, per tenir la màxima capacitat, aproxima la seva forma a la d'un cilindre.

En aquesta obra, però, Kepler no mostra la intenció de buscar un mètode per trobar màxims i mínims que sigui general, sinó que se centra en l'estudi d'aquest problema particular.

Primerament calcula, fixada una diagonal, els volums que s'obtenen segons diferents alçades i bases que es puguin prendre. A partir d'aquests càlculs, recollits en una taula, intueix que el màxim volum s'obté quan la ràtio entre el diàmetre de la base i l'alçada és $\sqrt{2}$.

Llavors, seguidament, demostra aquesta afirmació. De la mateixa manera que Arquimedes i al-Tusi, primer enuncia quin punt proporciona el màxim de l'expressió, i després compara amb el resultat que s'obtindria prenent un altre punt qualsevol a un costat i a un altre d'aquest, veient que són menors.

La demostració, en el cas d'aquest problema de Kepler, és també geomètrica, basada en les propietats dels triangles que es formen entre el diàmetre de la semicircumferència i els punts que es troben situats sobre l'arc.

Tot i que Kepler menciona Arquimedes i proporciona alguns dels seus mètodes per mesurar sòlids a *Nova stereometria,* el procediment que segueix per demostrar el màxim no sembla basar-se en l'utilitzat per Arquimedes, que podria no haver llegit.

5. Pierre de Fermat (1601-1665)

Cap a l'any 1629, Fermat desenvolupa un mètode que li permet obtenir no només el màxim o mínim de diferents expressions, sinó que també es pot utilitzar per trobar tangents a corbes i calcular centres de gravetat de sòlids de revolució. Tot i això, no escriu sobre ell fins l'any 1636, i no el publica a cap obra, sinó que aquest es difon inicialment a partir de cartes.

5.1. Biografia[31]

Pierre de Fermat va néixer a Beaumont-de-Lomagne, a França, el 20 d'agost de 1601.

Es coneixen pocs detalls de la seva vida privada. Sembla ser que va passar la infantesa al seu lloc natal, on la seva família era de classe benestant. La família de la seva mare, Claire de Long, era de parlamentaris, i el seu pare, Dominique Fermat, era comerciant de pells i segon cònsol de Beaumont-de-Lomagne.

Després de completar els seus estudis bàsics, Fermat hauria estudiat a la universitat de Tolosa, i passat un temps a Bordeus a finals de la dècada de 1620. Posteriorment va estudiar dret i es graduà de la Universitat d'Orleans el 1631. Llavors va retornar a Tolosa, on es casà i treballà com a advocat i parlamentari, dedicant-se a les matemàtiques en el seu temps lliure. Va tenir cinc fills, dos nois i tres noies, i va ser el més gran de tots, Clément-Samuel, qui s'encarregà de la publicació dels seus escrits matemàtics passada la seva mort, a *Varia opera mathematica* [25], el 1679.

A part de la seva coneguda faceta matemàtica, també coneixia diverses llengües amb fluïdesa: el francès, l'italià, el castellà, el llatí i el grec. Va morir el 1665 a Castres.

Les cartes i treballs de Fermat, la majoria dirigits a amics seus a París a partir de 1636, proporcionen alguns detalls sobre el seu desenvolupament com a matemàtic. A partir d'elles, es pot concloure que la seva estància a Bordeus a finals de la dècada de 1620 va marcar la seva manera d'abordar les matemàtiques. A Bordeus, va estudiar en profunditat els treballs de François Viète (1540-1603), de qui va adoptar la idea de l'àlgebra simbòlica com a eina per unir la geometria i l'aritmètica depenent de si l'element desconegut representava segments o nombres, i també la seva teoria per les equacions. La major part de la recerca de Fermat era dirigida a reduir els problemes a d'altres per als quals es conegués la solució general.

En un principi, de la mateixa manera que Viète, Fermat es va interessar pels matemàtics grecs com Apol·loni, Euclides, Arquimedes i en especial l'*Aritmètica* de Diofant. Agafant problemes d'aquestes fonts antigues, els resolia amb les noves tècniques algebraiques a la seva disposició, i els reformulava de manera més general.

No tenia intencions de publicar els seus resultats de manera no anònima, sinó que els seus escrits eren petits assaigs o cartes en què enviava reptes i problemes dels quals donava la solució

[31] [27, pp. 556-67, vol. IV], [26], [30]

en cartes posteriors que circulaven sobretot al cercle de Marin Mersenne (1588-1648) a París, amb qui mantenia correspondència i qui el va posar en contacte, entre d'altres, amb Gilles Personne de Roberval (1602-1675) o Étienne Pascal (1588-1651). Molts dels resultats de Fermat estaven simplement escrits als marges dels llibres.

5.2. Obres

L'esperit de l'obra de Fermat era mostrar com l'àlgebra renaixentista podia ser aplicada a la geometria grega, utilitzant la notació introduïda per Viète, i conservant la homogeneïtat de les fórmules. [22, p. 143]

Aproximadament entre 1629 i 1636 es dedicà a restaurar els *Plane Loci* d'Apol·loni, i al sistema de geometria analítica que en va derivar. El seu treball *Ad locos planos et solidos isagoge* ja circulava en forma manuscrita el 1636, un any abans que Descartes publiqués la seva *Géométrie* el 1637. Aquestes dues obres van establir els fonaments per la geometria analítica. [23, pp. 95-96]

Els escrits sobre el seu mètode per trobar màxims, mínims i tangents són d'entre 1636 i 1643, tot i que Fermat l'hauria concebut el 1629. També utilitzà aquest mètode per derivar la llei de refracció i calcular centres de gravetat de sòlids de revolució.

Els seus resultats més importants pel que fa a les quadratures els va obtenir entre 1643 i 1657. El mètode que va desenvolupar li permetia trobar l'àrea sota les corbes que amb notació actual s'escriurien de la forma $y^q = kx^p$ i $x^p y^q = k$, amb p, q enters positius, i en el segon tipus, $p + q > 2$. [26]

El 1650, a *Novus secundarum et ulterioris ordinis radicum in analyticis usus*, va observar que les equacions amb una incògnita determinen construccions de punts, les de dues incògnites el lloc geomètric de corbes planes, i amb tres incògnites, el de superfícies a l'espai.

Tot i que no va deixar constància dels seus mètodes per a la teoria de nombres, va obtenir resultats ara coneguts com el petit teorema de Fermat i el darrer teorema de Fermat, restringint els seus estudis als nombres enters, pel seu interès en els nombres primers i la divisibilitat.

L'estiu de 1654, en un intercanvi de correspondència amb Blaise Pascal (1623-1662), compararen les solucions respectives a un problema probabilístic proposat a Pascal, establint els primers fonaments de la teoria de probabilitat. [27, pp. 574, vol. IV]

Quan va morir, els treballs matemàtics de Fermat es trobaven repartits en les seves cartes per tota Europa. El seu fill Clément-Samuel de Fermat s'encarregà de la tasca d'intentar unir-los i publicar-los. El 1670 va republicar l'*Aritmètica* de Diofant amb els comentaris del seu pare i algunes de les seves cartes[32], i el 1679, tots els escrits que va poder recollir, a *Varia opera mathematica* [25], que va ser la única col·lecció d'escrits de Fermat publicada fins a finals del segle XIX. L'obra es va reimprimir a el 1861. El 1891, Tannery i Henry van publicar les *Oeuvres de Fermat* [28], 4 volums que, juntament amb un suplement de 1922 contenen tots els escrits seus que es conserven. [26, p. 412]

5.3. El mètode de màxims i mínims

Fermat exposa el seu mètode de màxims i mínims a diferents cartes dirigides a matemàtics contemporanis que contribuïren a la seva difusió, com Mersenne, Roberval, Descartes o Pierre Brûlart de Saint-Martin. En aquestes cartes, proporciona exemples de les diverses aplicacions en el càlcul d'extrems, però també de com trobar tangents a corbes i determinar centres de gravetat de sòlids. A partir del mètode de màxims i mínims, també va derivar la llei de refracció. Tot i això, degut a que els seus escrits no es publiquen i només circulen en les seves cartes i còpies que se'n fan, no hi havia una versió definitiva ja que, amb el pas del temps, hi afegeix lleugers canvis. A part, és difícil establir la cronologia exacta degut a que alguns dels escrits no estan datats.

Segons afirma en una carta, Fermat hauria ideat el mètode als voltants de 1629, tot i que no va ser àmpliament conegut pels matemàtics francesos fins el 1637. [29]

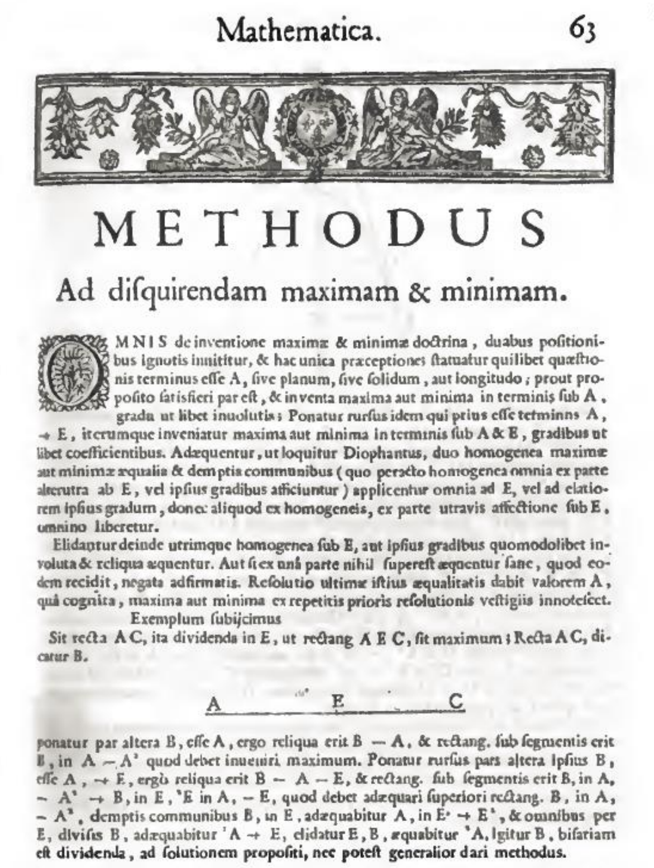
El mètode de màxims i mínims i de les tangents va ser un punt central en un debat entre Fermat i Descartes la primavera de 1638, iniciat per una crítica de Fermat a la suposició de la "tendència al moviment" que Descartes atribuïa a la llum a la seva *Dioptrique*. Descartes va respondre-hi criticant el mètode de Fermat per la noció d'adigualitat en la que es basa, i per que no el considerava un mètode general per al càlcul de tangents. Després d'aquestes crítiques, Fermat va enviar diversos escrits intentant explicar amb més claredat el seu mètode, que Descartes finalment va acabar acceptant com a vàlid. [27] [26] [30]

El primer escrit que va circular sobre el mètode, el 1636, està titulat *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (Mètode per a la recerca de màxims i mínims) [33] (Figura 13). Tot i que en aquest escrit, Fermat no justifica ni explica quins són els fonaments del mètode, hi afegeix un exemple d'aplicació, buscant per quin punt cal tallar un segment per tal que el rectangle que té cadascuna de les parts com a costats sigui màxim.

---

[32] A l'obra *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus. Cum commentariis C. G. Bacheti V. C. et observationibus D. P. de Fermat Senatoris Tolosani. Accessit Doctrinae analyticae inventum novum, collectum ex variis eiusdem D. de Fermat epistolis*, Tolosa, 1670.

[33] El text es troba a [25, p. 63] i a [28, pp. 133-134, vol. I]. Pel que fa a la notació, hi ha petites diferències. A *Varia opera mathematica* [25] s'indiquen els quadrats amb exponents, i els dobles de les quantitats amb el número "2", mentre que a *Oeuvres de Fermat* [28], s'indiquen amb una "q" després de la variable per als quadrats, i amb "bis" per als dobles. En ambdós casos s'utilitza "in" per indicar els productes.



Mathematica. 63

METHODUS

Ad diſquirendam maximam & minimam.

OMNIS de inventione maximæ & minimæ doctrina, duabus poſitionibus ignotis innititur, & hac unica præceptione; ſtatuatur quilibet quæſtionis terminus eſſe A, ſive planum, ſive ſolidum, aut longitudo; prout propoſito ſatisfieri par eſt, & inventa maxima aut minima in terminis ſub A, gradu ut libet inuolutis; Ponatur rurſus idem qui prius eſſe terminus A, + E, iterumque inveniatur maxima aut minima in terminis ſub A & E, gradibus ut libet coefficientibus. Adæquentur, ut loquitur Diophantus, duo homogenea maximæ aut minimæ æqualia & demptis communibus (quo peracto homogenea omnia ex parte alterutra ab E, vel ipſius gradibus afficiuntur) applicentur omnia ad E, vel ad elatiorem ipſius gradum, donec aliquod ex homogeneis, ex parte utravis affectione ſub E, omnino liberetur.

Elidantur deinde utrimque homogenea ſub E, aut ipſius gradibus quomodolibet involuta & reliqua æquentur. Aut ſi ex unâ parte nihil ſupereſt æquentur ſane, quod eodem recidit, negata adfirmatis. Reſolutio ultimæ iſtius æqualitatis dabit valorem A, quâ cognita, maxima aut minima ex repetitis prioris reſolutionis veſtigiis innoteſcet.

Exemplum ſubijcimus

Sit recta AC, ita dividenda in E, ut rectang AEC, ſit maximum; Recta AC, dicatur B.

A E C

ponatur par altera B, eſſe A, ergo reliqua erit B − A, & rectang. ſub ſegmentis erit B, in A − A² quod debet inueniri maximum. Ponatur rurſus pars altera ipſius B, eſſe A, + E, ergò reliqua erit B − A − E, & rectang. ſub ſegmentis erit B, in A, − A² + B, in E, ²E in A, − E, quod debet adæquari ſuperiori rectang. B, in A, − A², demptis communibus B, in E, adæquabitur A, in E² + E², & omnibus per E, diviſis B, adæquabitur ²A + E, elidatur E, B, æquabitur ²A, Igitur B, bifariam eſt dividenda, ad ſolutionem propoſiti, nec poteſt generalior dari methodus.

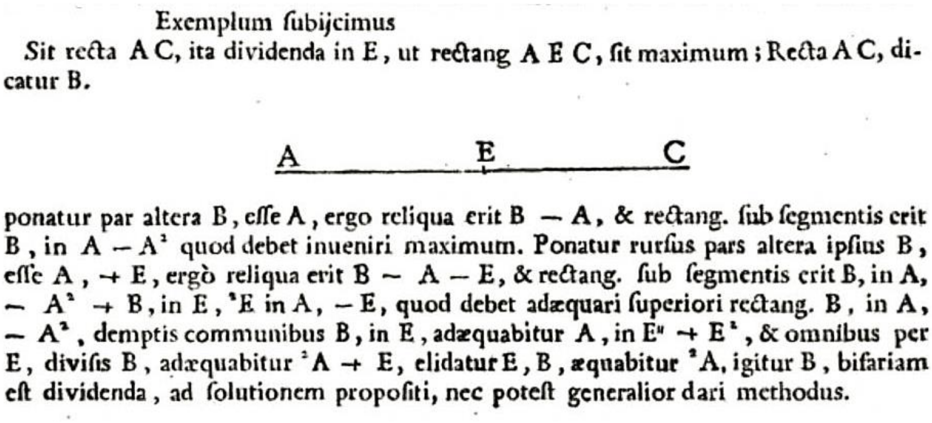
Figura 13. Fragment de *Varia opera mathematica* (1861) [25, p. 63] amb què Fermat presenta el mètode.

La traducció del text és la següent: [34]

> Tota la doctrina de la recerca de màxims i mínims es basa en aquesta proposició única. Sigui A una incògnita arbitrària del problema, que pot tenir una, dues o tres dimensions, segons convingui a allò que es proposa. S'expressa la quantitat màxima o mínima en termes de A, els quals poden estar afectats de graus diversos. Seguidament A se substitueix per $A + E$ i aleshores la quantitat màxima o mínima ve expressada en termes que contenen A i E, afectats de graus diversos. Ara, parlant com Diofant, adigualem les dues expressions del màxim o mínim, i simplifiquem els termes que els són comuns (un cop hàgim fet això, tindrem que tots els termes contindran E o E afectat d'algun grau). Tot seguit, ho dividim tot per E, o per E afectat d'un grau convenient per tal que un dels membres quedi net de E.
>
> Suprimim ara tots els termes que encara contenen el terme E o alguna de les seves potències. Finalment, igualem un terme amb l'altre i, en el cas que un dels dos sigui nul, igualem els termes positius i els termes negatius. La resolució d'aquesta darrera equació dóna el valor de B que proporcionarà el valor màxim o mínim, un cop el substituïm en l'expressió inicial.

[34] Traducció a partir de [30] i [31].

Seguidament hi afegeix un exemple, on busca la manera de dividir un segment, que anomena AC per un punt E de manera que el rectangle de costats AE, EC sigui màxim, segons es veu a la figura 14.



Exemplum ſubijcimus

Sit recta A C, ita dividenda in E, ut rectang A E C, ſit maximum; Recta A C, dicatur B.

ponatur par altera B, eſſe A, ergo reliqua erit B — A, & rectang. ſub ſegmentis erit B, in A — A² quod debet inueniri maximum. Ponatur rurſus pars altera ipſius B, eſſe A, + E, ergò reliqua erit B — A — E, & rectang. ſub ſegmentis erit B, in A, — A² + B, in E, ²E in A, — E, quod debet adæquari ſuperiori rectang. B, in A, — A², demptis communibus B, in E, adæquabitur A, in E² + E², & omnibus per E, diviſis B, adæquabitur ²A + E, elidatur E, B, æquabitur ²A, igitur B, bifariam eſt dividenda, ad ſolutionem propoſiti, nec poteſt generalior dari methodus.

Figura 14. Exemple de Fermat a *Varia opera mathematica* (1861) [25, p. 63]

Per resoldre-ho, Fermat anomena B la llargada d'AC, i A la llargada d'una de les parts, per tant l'altra serà $B - A$. Llavors continua:

> El rectangle que formen ambdós segments serà $B\ in\ A - Aq$, que és la quantitat que volem que sigui màxima.
>
> (En notació actual, si anomenem b la llargada total del segment, i x la llargada de la part que Fermat representa per A, l'expressió a maximitzar s'escriuria com $bx - x^2$).
>
> Sigui ara $A + E$ el primer segment de B, l'altra part és $B - A - E$, i el rectangle que formen aquests dos segments és
>
> $$B\ in\ A - Aq + B\ in\ E - A\ in\ E\ bis - Eq$$
>
> (En notació actual, si denotem ara per $x + e$ la longitud de la primera de les parts en què s'ha tallat el segment, l'expressió a maximitzar serà $bx - x^2 + be - 2xe - e^2$).
>
> Que cal comparar per adigualació a
>
> $$B\ in\ A - Aq$$
>
> (En notació actual, cal comparar-ho a $bx - x^2$).
>
> Simplificats els termes comuns, s'obté
>
> $$B\ in\ E\ adaequabitur\ A\ in\ E\ bis + Eq$$
>
> Dividint tots els termes per E,
>
> $$B\ adaequabitur\ A\ bis + E$$
>
> I eliminant E,

$$B\ aequabitur\ A\ bis$$

(En notació actual, utilitzant el signe $\approx$ per l'adigualació, Fermat escriu $be \approx 2xe + e^2$. Seguidament dividint per e, obté $b \approx 2x + e$. I per últim, eliminant la e de l'expressió, Fermat obté la igualtat $b = 2x$).

Per tant, per resoldre el problema, cal dividir el segment B per la meitat. No és possible un mètode més general.

El verb "adigualar" que utilitza Fermat prové de la traducció al llatí de la paraula grega "parisotes" (comparació) de l'*Aritmètica* de Diofant (segle III). Diofant l'havia utilitzat en alguns problemes on obtenia solucions numèriques a partir d'una tècnica que consistia en atribuir un valor aproximat a la incògnita (en equacions lineals), fet que permetia establir una proporció d'on es podia extreure la solució real. Aquesta tècnica era considerada als manuals d'àlgebra de principis del segle XVI una de les principals en l'àlgebra, i era anomenada regla falsa o de falsa posició. [31]

A partir d'aquest exemple d'aplicació del mètode per trobar màxims i mínims, es pot veure com l'algoritme es basa en uns passos senzills: només cal expressar la quantitat a minimitzar o maximitzar en termes d'una quantitat desconeguda, A, comparar-la a l'expressió obtinguda quan se substitueix A per $A + E$, suposant iguals les expressions, però sense que ho siguin realment. Llavors, simplificant termes comuns, dividint, i eliminant tots els termes que contenen E, s'arriba a l'expressió per A on s'assoleix el màxim, que en aquest cas Fermat considera com una igualtat, enlloc d'una adigualtat.

Cal destacar que Fermat en cap moment posa cap condició a la mida d'aquesta E, ni menciona que sigui nul·la o infinitesimalment petita, sinó que simplement suprimeix o elimina els termes que la contenen a l'últim pas.

El mètode torna a aparèixer en un text anomenat *Methodus de maxima et minima*, conegut també com *Analytica* [35] que s'ha datat entre 1643 i 1644, tot i que segons Mahoney [26], sembla més probable que sigui de 1639 o 1640. En aquest cas, no exposa el procediment una altra vegada, sinó que intenta explicar els seus orígens, i afegeix un altre exemple de càlcul de màxims. En aquest text explica que va tenir la idea del seu mètode a partir d'una afirmació de Pappus i de l'anàlisi de la *syncrisi* i l'*anastrophe* de Viète.

El mètode de la *syncrisi* de Viète permetia mostrar com les constants d'una equació estan relacionades amb dues de les seves arrels. Un exemple que proporciona Viète (Figura 15), escrit amb notació actual, és el cas de l'equació $BA - A^2 = Z$, on B i Z són constants.

[35] El text es troba a [28, pp. 147-153, vol. I] .

Proponatur B in A — A quad, æquari Z plano. Et rurſus B in E — E quadr, æquari Z plano.

Oportet ex ſyncriſi earum æquationum conſtitutionem dignoſcere : quoniam igitur quæ uni æquantur æqualia ſunt inter ſe, manifeſtum eſt B in A—A quad., æquari B in E — E quad. Et per antitheſin, ſtatuendo ſi placet A majorem quam E, quod quidem hic liberum eſt, propter ſuppoſitam radicum ἀμφιβολίαν. A quad. — E q., æquabitur B in A — B in E, & omnibus per A — E diviſis. $\frac{\text{A quad.} - \text{E quad.}}{\text{A} - \text{E}}$ id eſt A + E, æquabitur B.

Eſt igitur B ſumma duorum de quibus quæritur laterum, oriunda ex applicatione differentię quadratorum, ad differentiam laterum: ut eſt generaliter conſtitutum.

Porro quum B in A — A quad., æquetur Z plano : ſi in locum B, ſubrogetur jam agnitus ipſius valor $\frac{\text{A quad.} - \text{E quad.}}{\text{A} - \text{E}}$ ſeu A + E. $\frac{\text{A quad. in E} - \text{E quad. in A}}{\text{A} - \text{E}}$ id eſt E in A, æquabitur Z plano.

Eſt igitur Z planum, id quod fit ſub duobus de quibus quæritur lateribus, ortum ex differentię factorum reciproce à quadrato unius in radicem alterius applicatione, ad differentiam laterum: ut eſt quoque generaliter conſtitutum.

Figura 15. Exemple on Viète explica la *syncrisi* [32, p. 106]

Els passos que segueix Viète, en notació actual, són els següents:

> Suposant que l'equació té arrels A, E, les hi substitueix i n'iguala les parts esquerra, obtenint que $BA - A^2 = BE - E^2$.
>
> Seguidament, suposant que $A > E$, ho escriu com $A^2 - E^2 = BA - BE$.
>
> Divideix per $A - E$, i obté $\frac{A^2-E^2}{A-E} = A + E = B$.
>
> Llavors observa que B és la suma de les dues arrels.
>
> A més, utilitzant que $BA - A^2 = Z$, i substituint B, observa que $\frac{A^2E-E^2A}{A-E} = EA = Z$, i per tant Z és el producte de les dues arrels. [36]

En concret, al text *Analytica,* Fermat afirma que: [37]

> Analitzant el mètode de la *syncrisi* i l'*anastrophe* de Viète, i explorant acuradament la seva aplicació a la recerca de la constitució de les equacions correlatives, em va venir a l'esperit la manera de derivar-ne un procediment per trobar els màxims i els mínims i per determinar així, amb facilitat, totes les dificultats relatives a les condicions que tantes dificultats han procurat als geòmetres antics i moderns.
>
> Com ja va dir Pappus, i com sabien els antics, els màxims i els mínims són únics i singulars[…]. D'això se'n segueix que, a un costat i a l'altre del punt que constitueix la determinació, podem considerar una equació ambigua i, dels dos punts, un a cada banda, s'obtenen dues equacions ambigües correlacionades, iguals i semblants.[38]

[36] Traduït a partir de [35, p. 209] .

[37] Traduït a partir de [30] i [31].

[38] «Dum syncriseos et anastrophes Vietææ methodum expenderem, earumque usum in deprehendenda aequationum correlatarum constitutione accuratius explorarem, subiit animum nova ad inventionem maxima et minimæ exinde derivanda methodus, cujus ope dubia quælibet ad διορισμόν pertinentia, quæ veteri et nove molestiam exhibuere Geometriæ, facillime profligantur.

Llavors, utilitzant l'afirmació de Pappus que els extrems són singulars, i les relacions entre els coeficients i les arrels d'una equació seguint la *syncrisi* de Viète, Fermat suposa que les arrels, que denota, com Viète, A i E prendran el mateix valor quan s'obtingui el màxim o mínim, i les iguala, obtenint així el mètode de màxims i mínims.

A l'exemple que proporciona a l'*Analytica*, hi ha una diferència en l'ús d'A i E si es compara amb l'exemple del primer escrit sobre el mètode, *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*. En aquest cas anomena les arrels A i E, seguint l'esquema de la *syncrisi* de Viète, enlloc d'utilitzar A i $A + E$. Però afegeix un aclariment al final del text, on justifica l'ús de suposar les arrels com A i $A + E$, afirmant que: [39]

> Tanmateix, atès que, a la pràctica, les divisions per un binomi són força complicades i molt intricades, és preferible, a l'hora de comparar les equacions correlatives, posar de manifest les diferències que hi ha entre les arrels, de manera que no s'hagi de fer cap altra cosa que una simple divisió per aquesta diferència. […] Atès que E, a l'igual de A, és una incògnita, res no impedeix que la designem $A + E$. [40]

Això sembla indicar que quan va concebre el mètode, anys abans d'escriure'l a la primera carta, ho va fer suposant arrels A i E, i després igualant-les, però que més tard, per tal de simplificar els càlculs a l'hora d'haver de dividir per la seva diferència, decidí que seria millor denotar-les com A i $A + E$. D'aquesta manera, la divisió per la diferència de les arrels consistiria només en una divisió per E. I ho va escriure d'aquesta manera més senzilla a l'hora d'explicar el mètode per primera vegada a *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* de 1636.

Un altre dels escrits on Fermat reflexiona sobre el seu mètode és una carta a Pierre Brûlart de Saint-Martin, datada del 31 de març de 1643[41], però que no va ser descoberta i publicada fins l'any 1919. Segons Mahoney [26], la carta a Brûlart[42] conté una manera diferent d'abordar el mètode i, en ser l'última escrita sobre aquest, deixa constància de l'ampliació de les idees de Fermat amb el pas del temps.

En aquesta carta, a partir d'un exemple, Fermat raona una justificació del seu mètode. De la mateixa manera que a l'escrit anomenat *Analytica*, torna a explicar que els màxims o mínims són punts únics, fent referència a Pappus.

Maximæ quippe et minimae sunt unicæ et singulares, quod et Pappus monuit et jam veteres norunt […]. Inde sequitur, ab utraqæ puncti determinationis constitutivi parte, posse sumi æquationem unam ancipitem et, ex duabus utrimque sumptis, effici duas æquationes ancipites correlatas æquales et similes.» [28, pp. 147-148, vol. I]

[39] Traduït a partir de [30].

[40] «Quia tamen operosa nimis et plerumque intricata est divisionum illa per binomia practice, conveniens visum est latera æquationum correlatarum inter se per ipsorum differentiam comparari ut, ea ratione, unica ad differentiam illam applicatione totum opus absolvatur. […] Sed, quoniam E (perinde atque A) est incerta quantitas, nihil vetat quominus vocetur A + E.» [28, pp. 150, vol. I]

[41] El text es troba a [28, pp. 120-125, Suplement].

[42] La traducció de la carta es troba a l'apèndix B del treball.

En afirmar, en aquesta carta, que per tot punt a banda i banda d'on s'obté el màxim o mínim, el valor de l'expressió és sempre menor o major respectivament[43], sembla que Fermat tingui en compte només màxims i mínims globals, i no hi inclogui extrems locals. En tots els exemples que tracta als seus escrits, no troba cap obstacle en aquest aspecte, ja que sempre hi havia un únic extrem a considerar, o bé perquè eren problemes quadràtics, o bé perquè eren cúbics amb algun dels extrems al 0, que era una solució irrellevant per la situació geomètrica del problema [26].

Donat el problema del qual vol trobar el màxim o mínim i l'expressió obtinguda al punt on s'obté l'extrem, A, la nostra incògnita, Fermat considera les expressions que s'obtenen als punts a banda i banda, que representa per $A+E$ i $A-E$. I assegura que aplicant el mètode a ambdues expressions s'obtindrà el mateix resultat per aïllar el màxim, A. En aquesta carta, afirma que si el coeficient que acompanya E^2 a l'expressió és negatiu, es tractarà d'un màxim, mentre que si és positiu, llavors s'obtindrà un mínim.

5.4. Aplicacions del mètode

A part del càlcul de màxims i mínims, Fermat aplica el seu mètode al càlcul de tangents. Tot i afirmar que hi aplica el mètode, als escrits no menciona en cap moment quina és la quantitat que maximitza o minimitza. [1] Es tracta, més bé, de l'ús del que anomena adigualació.

El procediment que segueix per determinar les tangents l'explica en diversos escrits, com una carta coneguda com *Méthode de maximis et minimis expliquée et envoyée par M. Fermat à M. Descartes*[44] enviada a Mersenne el juny de 1638 on intenta aclarir el mètode de les tangents després de les critiques de Descartes, i un escrit titulat *Ad eamdem methodum*[45] (Sobre el mateix mètode) també conegut com *Doctrinam tangentium*, que és l'únic del qual es conserva l'original escrit per Fermat. S'ha datat de 1640, però Stromholm [29] creu més probable que el text sigui de la tardor de 1638. En ell, Fermat explica: [46]

> La teoria de les tangents és una conseqüència del mètode de determinació de màxims i mínims[…].
>
> Les línies corbes a les quals hem determinat les tangents tenen unes propietats específiques que es poden expressar o bé simplement per línies rectes, o bé per mitjà de corbes tan complicades com vulguem amb rectes o altres corbes. […]

[43] «Il faut donc chercher un point unique, au delà et au deçà duquel tous les termes de la question soient ou tousiours plus grands ou tousiours plus petits que celuy qui sera produit par le point cherché. Il importe donc de comparer le point unique avec ceux qui peuvent estre imaginés de chaque costé.» [28, pp. 122, Suplement]

[44] El text es troba a [28, pp. 156-158, vol. II].

[45] El text es troba a [28, pp. 158-159, vol. I].

[46] Traducció a partir de [30].

De fet, en el pla, considerem corbes arbitràries expressades per dues posicions donades, una de les quals la podem anomenar diàmetre i l'altre, ordenada [applicata]. Aleshores considerem la tangent en un punt donat de la corba ja construïda i, per adigualació, considerem la propietat específica de la corba, no ja sobre la corba sinó sobre la tangent que busquem.

Eliminem, d'acord amb la doctrina dels màxims i els mínims, els termes que calgui, i arribem a una igualtat que permet determinar el punt de tall de la tangent amb el diàmetre i, per tant, la pròpia tangent.[47]

És a dir, suposant el problema resolt amb la tangent per un punt de la corba ja construïda, compara per adigualació, la propietat de la corba en aquest punt amb la propietat de la corba en un altre punt que no es troba sobre aquesta, sinó sobre la tangent.

El primer exemple que Fermat utilitza per mostrar com utilitzar el mètode de màxims i mínims per trobar tangents és la tangent a la paràbola[48], en un text titulat *De Tangentibus linearum curvarum,* a continuació del primer escrit del mètode, *Methodus ad disquirendam maximam et minimam,* del 1636. No hi explica els passos prèviament, sinó que directament resol l'exemple. L'exemple va acompanyat de la figura 16.

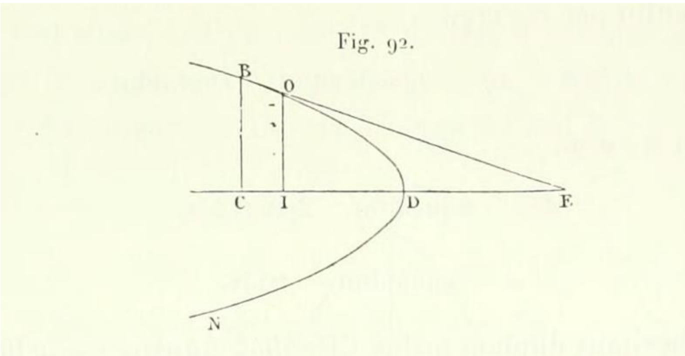


Figura 16. Esquema que acompanya l'exemple a *Oeuvres de Fermat* (1922) [28, pp. 135, vol. I]

La traducció del text, a *Oeuvres de Fermat* [28], és la següent: [49]

De les tangents a les línies corbes

[47] «Doctrinam tangentium antecedit jamdudum tradita Methodus de inventione maximae et minimae [...]

Linete curvae, in quibus tangentes inquirimus, proprietates suas specificas vel per lineas tantum rectas absolvunt, vel per curvas rectis aut alis curvis quomodo libet implicatas.[...]

Consideramus nempe in plano cujuslibet curvae rectas duas positione datas, quarum altera diameter, si libeat, altera applicata nuncupetuir. Deinde, jam inventam tangentem supponentes ad datum in curva punctum, proprietatem specificam curvie, non in curva amplius, sed in invenienda tangente, per adequalitatem consideramus et, elisis (quae monet doctrina de maxima et minima) homogeneis, fit demum tequalitas quse punctum concursius tangentis cum diametro determinat, ideoque ipsam tangentem.» [28, pp. 158-159, vol. I]

[48] El text es troba a [25, pp. 63-64] i [28, pp. 134-136, vol. I] .

[49] Traducció a partir de [30].

La invenció de les tangents en punts donats de corbes arbitràries, la reduirem al mètode precedent.

Suposem, per exemple, una paràbola BDN donada de vèrtex D i diàmetre DC. Considerem un punt donat B de la paràbola, al qual tirem la recta BE, tangent a la paràbola, la qual talla el diàmetre en el punt E.

Si agafem un punt qualsevol de la recta BE, i considerem l'ordenada OI i també l'ordenada BC del punt B, la proporció de CD a DI és més gran que la del quadrat de BC al quadrat de OI, atès que el punt O és exterior a la paràbola. Ara bé, a causa de la semblança dels triangles, el quadrat de BC és al quadrat de OI igual que el quadrat de CE al quadrat de IE.

Per tant, la proporció de CD a DI és més gran que la del quadrat de CE al quadrat de IE.

El punt B està donat, per tant, ho està també l'ordenada BC i, conseqüentment, el punt C. Per tant, CD està donat. Sigui doncs, igual a una quantitat donada D, i fem CE iguala a A i CI igual a E. Aleshores, tenim que:

La proporció de D a $D-E$ és major que la de $Aq.$ a $Aq.+Eq.-A\ in\ E\ bis$.

(En notació actual, si anomenem $x=CE$ enlloc de A, $CI=e$, i $CD=d$ la quantitat fixa, equival a $\frac{d}{d-e}>\frac{x^2}{x^2+e^2-2xe}$).

Multipliquem mitjos i extrems,

$D\ in\ Aq.+D\ in\ Eq.-D\ in\ A\ in\ E\ bis$ és major que $D\ in\ Aq.-Aq.\ in\ E$.

(En notació actual, $dx^2+de^2-2dxe>dx^2-x^2e$).

D'acord amb el mètode precedent adigualem. Un cop simplificats els termes comuns tindrem:

$$D\ in\ Eq.-D\ in\ A\ in\ E\ bis\ adaequabitur-Aq.\ in\ E$$

Que és el mateix que

$$D\ in\ Eq.+Aq.\ in\ E\ adaequabitur\ D\ in\ A\ in\ E\ bis$$

(En notació actual, $de^2-2dae\approx -x^2e\Rightarrow de^2+x^2e\approx 2dxe$).

Si ho dividim tot per e tindrem:

$$D\ in\ E+Aq.\ adaequabitur\ D\ in\ A\ bis$$

(En notació actual, $de+x^2\approx 2dx$).

Eliminem $D\ in\ E$, queda

$Aq. aequabitur\ D\ in\ A\ bis$ i , per tant, $A\ aequabitur\ D\ bis$.

(Elimina el terme que conté e, és a dir, de, i obté la igualtat $x^2 = 2dx \Rightarrow x = 2d$).

Hem establert d'aquesta manera que CE és el doble de CD, i això és correcte.[50]

El resultat que obté no és la tangent, sinó la llargada de la subtangent. Seguint els passos mencionats a *Doctrinam tangentium*, Fermat conclou que la llargada x, de la subtangent de la paràbola és el doble de l'ordenada del punt on la calcula, $x = 2d$.

Observant el procediment, es veu que no es tracta ben bé d'una cerca explícita de màxims o mínims d'una expressió, sinó que més bé es basa en l'adigualació. En cap dels escrits hi ha una explicació de com el mètode de les tangents depèn del de màxims i mínims, i als exemples que exposa Fermat, no especifica quina és l'expressió a maximitzar o minimitzar.

En el cas de l'aplicació per al càlcul de centres de gravetat, Fermat només proporciona un exemple, per a un paraboloide, en una carta de 1638[51]. Per fer-ho, considera el paraboloide obtingut tallant l'inicial per un pla paral·lel a la seva base, i el fet que per a paraboloides semblants, els centres de gravetat divideixen els eixos en una raó constant. Llavors a partir

[50] «Ad superiorem methodum inventionem tangentium ad data puncta in lineis quibuscumque curvis reducimus.

Sit data, verbi gratia, parabole BDN (fig. 92), cujus vertex D, diameter DC, et punctum in ea datum B, ad quod ducenda est recta BE tangens parabolen et in puncto E cum diametro concurrens.

Ergo, sumendo quodlibet punctum in recta BE, et ab eo ducendo ordinatam OI, a puncto autem B ordinatam BC, major erit proportio CD ad DI quam quadrati BC ad quadratum OI, quia punctum O est extra parabolen; sed, propter similitudinem triangulorum, ut BC quadratum ad OI quadratum, ita CE quadratum ad IE quadratum:

major igitur erit proportio CD ad DI quam quadrati CE ad quadratum IE.

Quum autem punctum B detur, datur applicata BC, ergo punctum C; datur etiam CD: sit igitur CD aequalis D datae. Ponatur CE esse A; ponatur CI esse E.Ergo

D ad D - E habehit majorem proportionem quam Aq. ad Aq. + Eq. - A in E bis.

Et, ducendo inter se medias et extremas,

D in Aq. + D in Eq. - D in A in E bis majus erit quam D in Aq. - Aq. in E.

Adaequentur igitur juxta superiorem methodum: demptis itaque communibus,

D in Eq. - D in A in E bis adaequabitur - Aq. in E,

aut, quod idem est,

D in Eq. + Aq. in E adaequabitur D in A in E bis.

Omnia dividantur per E: ergo

D in E + Aq. adaequabitur D in A bis.

Elidatur D in E: ergo

Aq. aequabitur D in A bis, ideoque A aequabitur D bis.

Ergo CE probavimus duplam ipsius CD, quod quidem ita se habet.»

[51] El text es troba a [28, pp. 136-139, vol. I].

d'aquesta raó, utilitza l'adigualació per obtenir el centre de gravetat, sense mencionar tampoc el càlcul de cap màxim o mínim.

Per últim, també utilitza el mètode de màxims i mínims per deduir la llei de la refracció[52] el 1662, més de dues dècades després de la seva crítica a *La Dioptrique* de Descartes de 1637. La qüestió de la refracció ja havia interessat altres matemàtics, entre els quals destaquen Alhazen (965-1039), Willebrord Snell van Roijen (1581-1626), de qui pren el nom la llei de Snell de 1621, i posteriorment Christiaan Huygens (1629-1695). [30]

En aquest cas Fermat sí explicita que busca el mínim d'una expressió, el temps que la llum triga en recórrer el camí entre dos punts, que troba utilitzant la raó entre la resistència dels dos medis per on passa la llum. D'aquesta manera arribà a la mateixa conclusió que Descartes a *La Dioptrique*. [26]

5.5. Conclusions

El mètode de màxims i mínims de Fermat, a diferència dels procediments per demostrar els màxims utilitzats per Arquimedes, al-Tusi o Kepler, es tracta d'un mètode general, que es pot utilitzar sense saber prèviament quin és el punt on s'obtindrà el màxim de l'expressió. Es pot dir que mentre que els procediments d'Arquimedes, al-Tusi i Kepler s'utilitzen per demostrar que s'ha obtingut un màxim en casos particulars, el de Fermat permet trobar-lo i en certa manera generalitzar.

Per a trobar els màxims i mínims, Fermat no utilitza mètodes geomètrics com Arquimedes o Kepler, sinó que ho fa algebraicament, a partir de les equacions que obté expressant la quantitat a maximitzar o minimitzar, i és aquest fet el que permet que sigui un mètode més general.

Alguns historiadors matemàtics com Jean-Étienne Montucla (1725-1799), Jean-Marie Duhamel (1797-1872) o Giulio Vivanti (1859-1949) van interpretar a partir del primer escrit sobre el mètode, que Fermat en podria haver tingut la idea a partir de l'observació de Kepler a *Nova stereometria doliorum vinariorum* (1615) de que en un entorn del punt on s'aconsegueix el màxim, el valor de l'expressió varia molt poc. Però a l'actualitat, després de la publicació del text conegut com *Analytica* en què Fermat explica els orígens del seu mètode a partir de les observacions de Pappus, aquesta idea queda descartada, tal com es recull als estudis de Tannery, Zeuthen o Wieleitner. [31]

Degut a que Fermat no fa cap comentari en els seus escrits sobre el valor de la variable E, la diferència entre les arrels, és difícil interpretar si la hi atribuïa un valor aleatori o un valor infinitesimalment petit, o si la considerava com exactament zero.

[52] El text es troba a [28, pp. 170-179, vol. I].

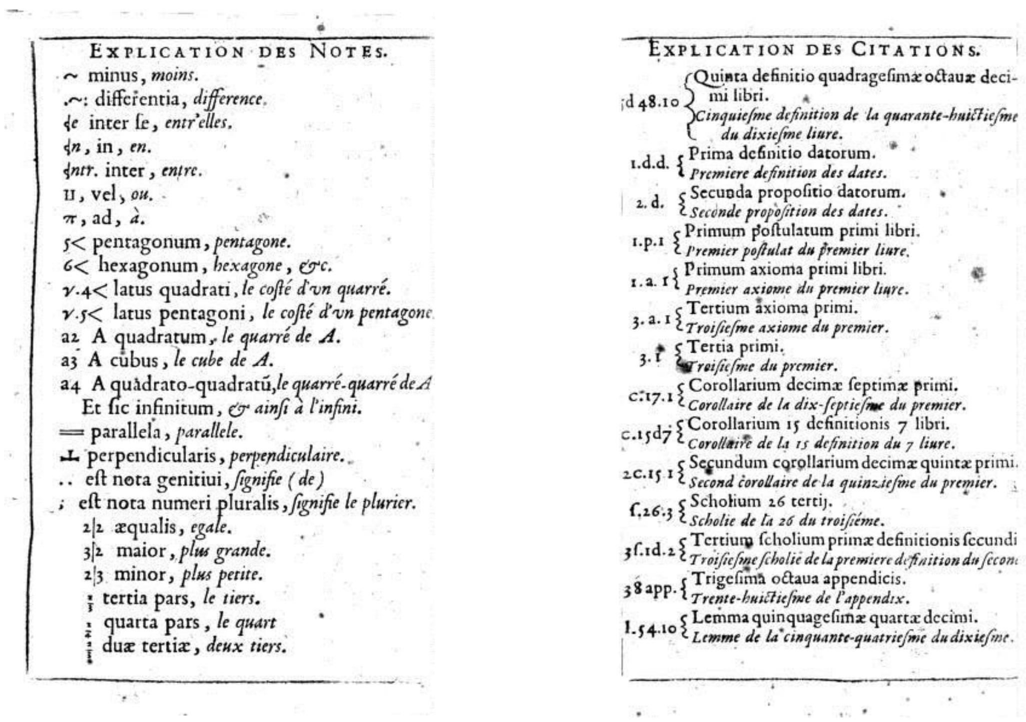
6. Pierre Hérigone (1580-1643)

Pierre Hérigone, el 1642, publica el mètode de màxims i mínims de Fermat en un suplement del seu curs de matemàtiques, fet que contribueix a la seva difusió. Tot i això, el procediment que mostra en aquesta obra és lleugerament diferent del de Fermat.

6.1. Biografia i obres

No es coneix molt de la vida de Pierre Hérigone (1580-1643). Sembla ser que era d'origen basc, i que va passar la major part de la seva vida a París com a professor de matemàtiques. Les seves publicacions més conegudes són un treball sobre els sis primers llibres dels elements d'Euclides, i el *Cursus mathematicus* [33], una col·lecció de sis volums de matemàtiques de nivell elemental i intermedi, explicada en llatí i francès, publicat entre 1634 i 1642, amb una segona edició el 1644. La particularitat més important d'aquest curs va ser el fet que introdueix un sistema complet de símbols i abreviacions matemàtiques, a més de notes als marges (Figura 17), seguint la tendència de les ciències del segle XVII d'intentar obtenir un llenguatge el més universal possible, tot i que la seva notació no es va adoptar per altres matemàtics. [27, pp. 299, vol. VI]

De la mateixa manera que Viète i Fermat, Hérigone utilitza vocals per representar les quantitats desconegudes, i consonants per a les conegudes. A les figures, també les representa en majúscules, però per al text utilitza les lletres en minúscula. [34]


EXPLICATION DES NOTES.

~ minus, *moins.*
.~: differentia, *difference.*
inter se, *entr'elles.*
in, *en.*
inter, *entre.*
vel, *ou.*
π, ad, *à.*
5< pentagonum, *pentagone.*
6< hexagonum, *hexagone, &c.*
√.4< latus quadrati, *le costé d'vn quarré.*
√.5< latus pentagoni, *le costé d'vn pentagone.*
a2 A quadratum, *le quarré de A.*
a3 A cubus, *le cube de A.*
a4 A quadrato-quadratũ, *le quarré-quarré de A.*
Et sic infinitum, *& ainsi à l'infini.*
= parallela, *parallele.*
⊥ perpendicularis, *perpendiculaire.*
.. est nota genitiui, *signifie (de)*
; est nota numeri pluralis, *signifie le plurier.*
2|2 æqualis, *egale.*
3|2 maior, *plus grande.*
2|3 minor, *plus petite.*
tertia pars, *le tiers.*
quarta pars, *le quart*
duæ tertiæ, *deux tiers.*

EXPLICATION DES CITATIONS.

d 48.10	Quinta definitio quadragesimæ octauæ decimi libri. / *Cinquiesme definition de la quarante-huictiesme du dixiesme liure.*
1.d.d.	Prima definitio datorum. / *Premiere definition des dates.*
2.d.	Secunda propositio datorum. / *Seconde proposition des dates.*
1.p.1	Primum postulatum primi libri. / *Premier postulat du premier liure.*
1.a.1	Primum axioma primi libri. / *Premier axiome du premier liure.*
3.a.1	Tertium axioma primi. / *Troisiesme axiome du premier.*
3.1	Tertia primi. / *Troisiesme du premier.*
c.17.1	Corollarium decimæ septimæ primi. / *Corollaire de la dix-septiesme du premier.*
c.1d7	Corollarium 15 definitionis 7 libri. / *Corollaire de la 15 definition du 7 liure.*
2c.15.1	Secundum corollarium decimæ quintæ primi. / *Second corollaire de la quinziesme du premier.*
s.26.3	Scholium 26 tertij. / *Scholie de la 26 du troisiéme.*
3s.1d.2	Tertium scholium primæ definitionis secundi / *Troisiesme scholie de la premiere definition du secon*
38 app.	Trigesima octaua appendicis. / *Trente-huictiesme de l'appendix.*
l.54.10	Lemma quinquagesimæ quartæ decimi. / *Lemme de la cinquante-quatriesme du dixiesme.*

Figura 17. Fragments de les taules amb l'explicació dels signes i referències als *Elements* d'Euclides al *Cursus mathematicus* [33]

6.2. El mètode de màxims i mínims al *Cursus mathematicus* d'Hérigone

Als seus escrits, Fermat havia assegurat voler redactar una presentació completa i única per explicar de manera clara i justificar el seu mètode, i mostrar com es pot aplicar de manera general tant a problemes clàssics com a nous. Però no va escriure mai aquest text, i per tant no hi ha una formulació definitiva i rigorosa per al mètode, que no va ser publicat fins l'any 1642 al *Cursus mathematicus* de Pierre Hérigone.

La presentació del mètode es troba al sisè volum, en un suplement. És a partir d'aquesta publicació i d'altres que es fan a partir del *Cursus mathematicus* que arriba a la majoria de matemàtics, entre els quals es troben Charles Cavendish (1594-1654), John Pell (1611-1685), Christiaan Huygens (1629-1695), Newton o Leibniz. [31]

A la proposició XXVI del suplement, que està titulada *De maximis et minimis*, Hérigone exposa alguns problemes on calcula màxims i mínims, i seguidament afegeix uns exemples on calcula rectes tangents.

Els problemes de màxims i mínims són:[53]

- Qüestió 1: Trobar el rectangle més gran comprès sota els segments d'una recta donada.
- Qüestió 2: Trobar el rectangle més gran comprès sota la mitjana i la diferència dels extrems de tres línies proporcionals.
- Qüestió 3: Tallar una recta donada en dos segments de manera que la suma dels seus quadrats sigui la menor possible.
- Qüestió 4: Trobar el con recte més gran contingut sota superfícies còniques iguals.

Seguidament troba la tangent a la paràbola i a la el·lipse.

Es tracta de problemes que Fermat havia proposat o resolt als escrits sobre el seu mètode de màxims i mínims.

A la proposició *De maximis et minimis*, Hérigone no explica el funcionament del procediment ni enuncia quins són els passos a seguir en general, sinó que només resol els problemes que hi proposa.

Hérigone resol tots els problemes d'una manera molt estructurada, seguint sempre el mateix procediment.

Primerament escriu les hipòtesis, i llavors suposa el problema resolt, amb una expressió que depèn del punt on s'obté el màxim, que representa per a, en la que denota com a primera anàlisi. De fet, empra el mètode analític de Viète.

[53] «Quaestio 1. Trouuer le plus grand rectangle contenu sous les segments d'une ligne droite donnée.
Quaestio 2. Trouuer le plus grand rectangle compris sous la moyenne & la difference des extremes de trois lignes proportionnelles.
Quaestio 3. Couper une ligne droite donnée en deux segments, qui ayent l'aggregé de leurs quarrez le moindre de tous.
Quaestio 4. Trouuer le plus grand des cones droicts contenus sous egales superficies coniques.»

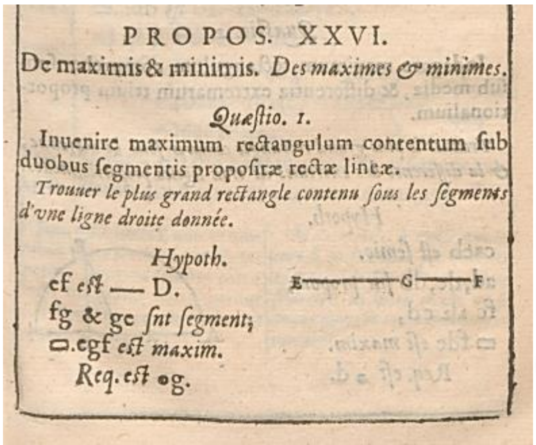
Seguidament, fa una segona anàlisi, on defineix e igual a zero, i substitueix a per $a+e$ a l'expressió anterior.

Per últim, iguala ambdues expressions: primer elimina els termes comuns, després divideix per e, i finalment, utilitzant que e està definida com zero, elimina tots els termes multiplicats per e, i obté la expressió per la solució a.

Les dues diferències principals que hi ha amb els escrits de Fermat pel que fa al mètode, són que Hérigone defineix la diferència entre les arrels, que Fermat va escriure com E, com a zero des de l'inici, i que no fa menció del concepte d'adigualació, sinó que tracta sempre amb igualtats.

En el primer problema (Figura 18, Taula 1), busca quin és el punt pel qual s'ha de tallar un segment donat de manera que el rectangle obtingut prenent com a costats cada una de les parts sigui el més gran possible. Aquest problema coincideix amb el que Fermat utilitza com a exemple al primer escrit on presenta el mètode, *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* de 1636.

A la taula 1 exposo, pas a pas i en llenguatge actual la resolució que fa Hérigone d'aquest problema.



PROPOS. XXVI.

De maximis & minimis. *Des maximes & minimes.*

Quæstio. 1.

Inuenire maximum rectangulum contentum sub duobus segmentis propositæ rectæ lineæ.

Trouuer le plus grand rectangle contenu sous les segments d'vne ligne droite donnée.

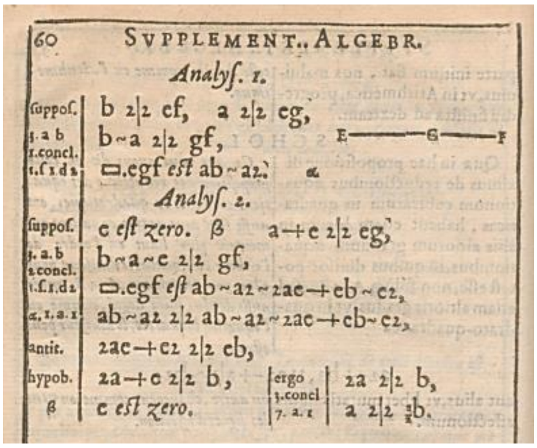
Hypoth.

ef *est* — D.

fg & ge *snt segment;*

▭.egf *est maxim.*

Req. est og.



60 SVPPLEMENT.. ALGEBR.

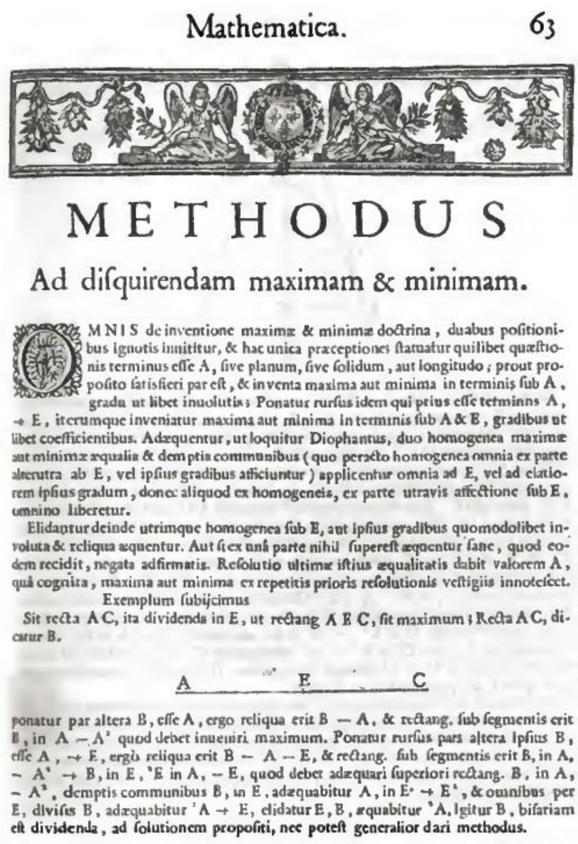
Analys. 1.

suppos.	b 2|2 ef, a 2|2 eg,
3.a b 1.concl.	b~a 2|2 gf,
1.s.1.d.2	▭.egf *est* ab~a2. α

Analys. 2.

suppos.	e *est zero.* β a+e 2|2 eg,
3.a.b 2.concl.	b~a~e 2|2 gf,
1.s.1.d.2	▭.egf *est* ab~a2~2ae+eb~e2,
α.1.a.1	ab~a2 2|2 ab~a2~2ae+eb~e2,
antit.	2ae+e2 2|2 eb,
hypob.	2a+e 2|2 b,
β	e *est zero.*

ergo 3.concl 7.a.1	2a 2|2 b, a 2|2 ½b.



Mathematica. 63

METHODUS

Ad disquirendam maximam & minimam.

OMNIS de inventione maximæ & minimæ doctrina, duabus positionibus ignotis innititur, & hac unica præceptione; statuatur quilibet quæstionis terminus esse A, sive planum, sive solidum, aut longitudo; prout proposito satisfieri par est, & inventa maxima aut minima in terminis sub A, gradu ut libet inuolutis; Ponatur rursus idem qui prius esse terminus A, + E, iterumque inveniatur maxima aut minima in terminis sub A & E, gradibus ut libet coefficientibus. Adæquentur, ut loquitur Diophantus, duo homogenea maximæ aut minimæ æqualia & demptis communibus (quo peracto homogenea omnia ex parte alterutra ab E, vel ipsius gradibus afficiuntur) applicentur omnia ad E, vel ad elatiorem ipsius gradum, donec aliquod ex homogeneis, ex parte utravis affectione sub E, omnino liberetur.

Elidantur deinde utrimque homogenea sub E, aut ipsius gradibus quomodolibet involuta & reliqua æquentur. Aut si ex unâ parte nihil superest æquentur sane, quod eodem recidit, negata adfirmatis. Resolutio ultimæ istius æqualitatis dabit valorem A, quâ cognita, maxima aut minima ex repetitis prioris resolutionis vestigiis innotescet.

Exemplum subijcimus

Sit recta AC, ita dividenda in E, ut rectang AEC, sit maximum; Recta AC, dicatur B.

ponatur pars altera B, esse A, ergo reliqua erit B — A, & rectang. sub segmentis erit B, in A — A² quod debet inueniri maximum. Ponatur rursus pars altera ipsius B, esse A, + E, ergò reliqua erit B — A — E, & rectang. sub segmentis erit B, in A, — A² + B, in E, ²E in A, — E, quod debet adæquari superiori rectang. B, in A, — A², demptis communibus B, in E, adæquabitur A, in E² + E², & omnibus per E, divisis B, adæquabitur ²A + E, elidatur E, B, æquabitur ²A, igitur B, bifariam est dividenda, ad solutionem propositi, nec potest generalior dari methodus.

Figura 18. Resolució de la Quaestio 1 al suplement del *Cursus mathematicus* d'Hérigone (1642) [33, pp. 59-60] (esquerra) i del mateix problema de Fermat a *Varia opera mathematica* (1861) [25, p. 63] (dreta)

<table>
<tr><th>Notació d'Hérigone</th><th>Notació actual</th></tr>
<tr><td>Hypoth.</td><td>Hipòtesis.</td></tr>
<tr><td>ef est — D.</td><td>ef és un segment donat.</td></tr>
<tr><td>fg & ge snt segment;</td><td>fg i eg són segments,</td></tr>
<tr><td>□.egf est maxim.[54]</td><td>El rectangle $eg \cdot gf$ és màxim.</td></tr>
<tr><td>Req. est •g.</td><td>Es requereix el punt g.</td></tr>
<tr><td>Analys. 1.</td><td>Anàlisi 1.</td></tr>
<tr><td>Suppos. b 2|2 ef, a 2|2 eg,</td><td>Suposem $b = ef, x = eg$,</td></tr>
<tr><td>3. a b b~a 2|2 gf,</td><td>Per l'axioma 3, $b - x = gf$,</td></tr>
<tr><td>1. concl.</td><td>Conclusió 1.</td></tr>
<tr><td>1.s 1.d2 □.egf est ab~a2. α</td><td>Pel primer scholium de la definició 1 del llibre 2, el rectangle $eg \cdot gf$ és $xb - x^2$ (α)</td></tr>
<tr><td>Analys. 2.</td><td>Anàlisi 2.</td></tr>
<tr><td>Suppos. e est zero. β a+e 2|2 eg,</td><td>Suposem $e = 0$ (β). $x + e = eg$</td></tr>
<tr><td>3. a.b b~a~e 2|2 gf,</td><td>Per l'axioma 3, $b - x - e = gf$</td></tr>
<tr><td>2. concl.</td><td>Conclusió 2.</td></tr>
<tr><td>1.s.1.d2 □.egf est ab~a2~2ae+eb~e2,</td><td>Pel primer scholium de la definició 1 del llibre 2, el rectangle $eg \cdot gf$ és $xb - x^2 - 2xe + eb - e^2$,</td></tr>
<tr><td>α.1.a.1 ab~a2 2|2 ab~a2~2ae+eb~e2,</td><td>Per (α) i l'axioma 1 del llibre primer, $xb - x^2 = xb - x^2 - 2xe + eb - e^2$,</td></tr>
<tr><td>antit. 2ae+e2 2|2 eb,</td><td>antit.[55] $2xe + e^2 = eb$</td></tr>
<tr><td>hypob. 2a+e 2|2 b,</td><td>hypob. $2x + e = b$</td></tr>
<tr><td>β e est zero.</td><td>(β) e és zero</td></tr>
<tr><td>ergo 2a 2|2 b,</td><td>Per tant $2x = b$</td></tr>
<tr><td>3.concl</td><td>Conclusió 3.</td></tr>
<tr><td>7.a.1 a 2|2 ½ b.</td><td>Per l'axioma 7 del llibre primer, $x = \frac{1}{2}b$.</td></tr>
</table>

Taula 1. Comparació de la notació d'Hérigone i la notació actual per la Quaestio 1.

[54] Hérigone utilitza □.egf per representar el rectangle $ef \cdot fg$, — per referir-se als segments, i • per als punts. Amb la seva notació, el signe ~ indica la sostracció, "2|2" s'utilitza per representar les igualtats, "3|2" per significar més gran, i "2|3" més petit. [34]

[55] Antithesis i hypobibasmo són dues regles que dóna Viète en la seva àlgebra. Amb la primera elimina els termes iguals d'una igualtat i en la segona divideix tota l'expressió per e. [34]

Hérigone justifica els passos i els càlculs que fa amb referències als llibres dels *Elements* d'Euclides, que es troben explicats al primer volum del *Cursus mathematicus*.

Els passos, en notació actual serien els següents:

> Primerament exposa les hipòtesis. Anomena ef el segment donat, i eg i gf les parts en què s'ha de tallar de manera que el rectangle $eg \cdot gf$ sigui el més gran possible. Per tant busca el punt de tall g.
>
> A la primera anàlisi anomena $b = ef$, el segment inicial, i $a = eg$, un dels costats. (Aquesta a és la incògnita, que en notació actual escriuríem amb una x).
>
> Calcula $b - x = gf$, i per tant, el rectangle serà $eg \cdot gf = xb - x^2$.
>
> Llavors fa una segona anàlisi, on defineix $e = 0$, i substitueix la incògnita x per $x + e$ a les quantitats anteriors, de manera que $x + e = eg$ i $b - x - e = gf$.
>
> El rectangle serà ara $eg \cdot gf = xb - x^2 - 2xe + eb - e^2$.
>
> Llavors, iguala les dues expressions per l'àrea: $xb - x^2 = xb - x^2 - 2xe + eb - e^2$.
>
> Un cop cancel·la els termes comuns, divideix per e, obtenint $2x + e = b$.
>
> Per últim, utilitzant que e és zero, $2x = b$, i per tant aïlla $x = \frac{1}{2}b$.

Pel que fa als passos i l'ordre que segueix, no hi ha diferència amb la solució escrita per Fermat. Primer calcula l'àrea del rectangle suposant que la primera de les parts del segment té longitud a, i després suposant que es tracta d'$a + e$. Seguidament les iguala, elimina termes comuns, divideix per e, i per últim considera només els termes no afectats per e per aïllar l'expressió per a on s'obtindrà el màxim.

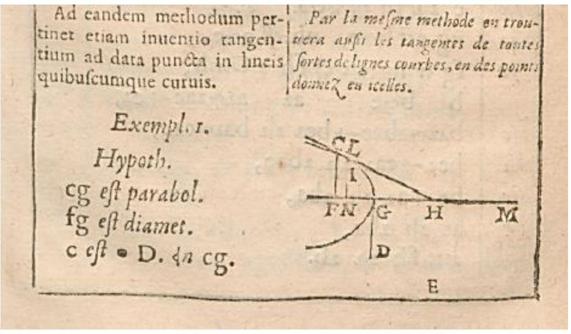
Crec que una de les diferències fonamentals és que Fermat ho presenta de manera retòrica i el lector ha d'anar apuntant apart les equacions que es volen resoldre, i Hérigone ho fa de manera simbòlica i a la vegada justifica tots els passos de la demostració amb proposicions dels *Elements* d'Euclides i amb les propietats de l'art analític de Viète. A part d'això, Hérigone defineix e com zero, tot i que Fermat no li havia donat mai cap valor concret. Per tant, pot parlar sempre en termes d'igualtats ja que la e no modifica les quantitats, sense fer ús del concepte de l'adigualació de Fermat.

A continuació dels problemes relacionats amb el càlcul de màxims i mínims, Hérigone escriu al *Cursus mathematicus* que amb el mateix mètode, es trobaran també les tangents en punts donats de tot tipus de corbes.

Per als problemes relacionats amb les tangents, donada la corba i el punt d'aquesta per on ha de passar, el seu objectiu és trobar el punt d'intersecció de la tangent amb el diàmetre de la corba.

Suposant el problema resolt, utilitza la semblança entre el triangle rectangle format entre leix de la corba, el punt de tangència, i el punt on la tangent talla l'eix, i el triangle, contingut en aquest, amb vèrtex en un altre punt de la tangent. Utilitzant la propietat de cada corba, pot comparar les expressions que obté per a cada punt i aïllar la solució.

En el *Cursus mathematicus* apareixen dos exemples de càlcul de tangents: el de la paràbola (Figura 19) i el de l'el·lipse, que Fermat ja havia donat com a exemples a *De Tangentibus linearum curvarum* (1636) i *Doctrinam tangentium* (1638/1640), respectivament.

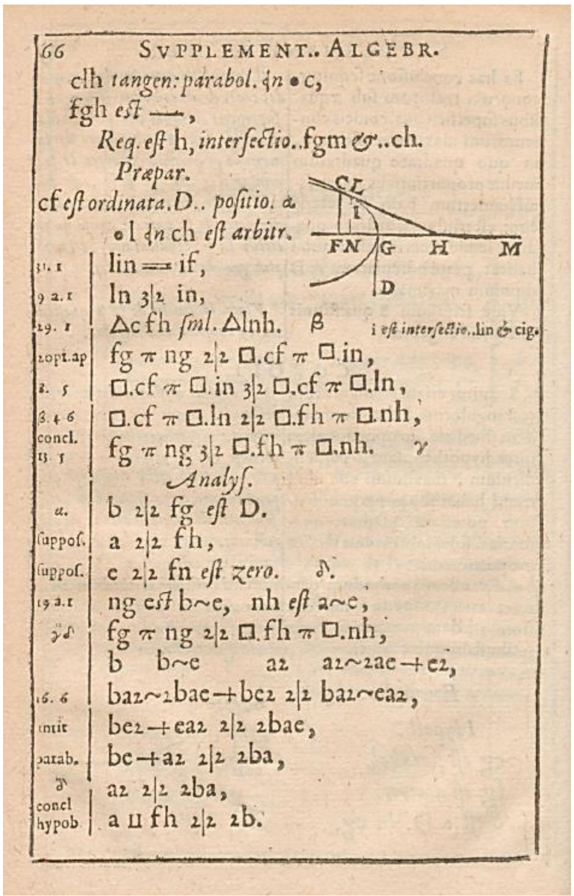

Ad eandem methodum pertinet etiam inuentio tangentium ad data puncta in lineis quibuſcumque curuis.

Par la meſme methode on trouuera auſſi les tangentes de toutes ſortes de lignes courbes, en des points donnez en icelles.

Exempl. 1.

Hypoth.

cg *eſt parabol.*
fg *eſt diamet.*
c *eſt* • D. *in* cg.


66 SVPPLEMENT.. ALGEBR.

clh *tangen: parabol. in* • c,
fgh *eſt* —,
Req. eſt h, *interſectio..* fgm *&..* ch.
Præpar.
cf *eſt ordinata. D.. poſitio.* α
• l *in* ch *eſt arbitr.*

31. 1 | lin = if,
9 2. 1 | ln 3|2 in,
29. 1 | △cfh *ſml.* △lnh. β
20pt.ap | fg π ng 2|2 □.cf π □.in,
3. 5 | □.cf π □.in 3|2 □.cf π □.ln,
β. 4 6 | □.cf π □.ln 2|2 □.fh π □.nh,
concl. 13. 5 | fg π ng 3|2 □.fh π □.nh. γ

i eſt interſectio.. lin *&* cig.

Analyſ.

α. | b 2|2 fg *eſt* D.
ſuppoſ. | a 2|2 fh,
ſuppoſ. | c 2|2 fn *eſt zero.* δ.
19 2.1 | ng *eſt* b~e, nh *eſt* a~e,
γ δ | fg π ng 2|2 □.fh π □.nh,
| b b~e a2 a2~2ae+e2,
16. 6 | ba2~2bae+be2 2|2 ba2~ea2,
| be2+ea2 2|2 2bae,
parab. | be+a2 2|2 2ba,
δ | a2 2|2 2ba,
concl hypob | a ꟷ fh 2|2 2b.

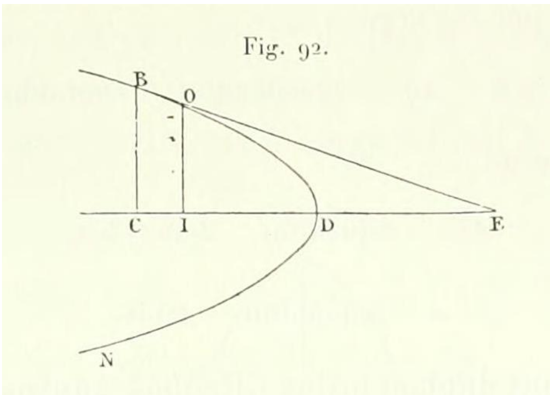


Figura 19. Comparació de la obtenció de la tangent a la paràbola per Hérigone (esquerra) al suplement del C*ursus mathematicus* (1642) [33, pp. 65-66]i per Fermat (dreta) a *Oeuvres de Fermat* (1891) [28, pp. 135, vol 1]

Per trobar la tangent de la paràbola, el procediment que segueix Hérigone és el següent:

> Suposa el problema resolt per una paràbola donada que passa pels punts c i g, i de diàmetre fg.

La recta que passa per c, l, h és tangent a la paràbola en el punt c.

Llavors, l'objectiu és determinar el punt h, que és la intersecció entre el diàmetre fgm i la recta tangent ch.

Pren l com un punt arbitrari de la tangent, i prenent ln paral·lel a la ordenada cf, compara $ln > in$, on i és el punt d'intersecció de ln amb la paràbola.

Per la propietat de la paràbola, $\frac{fg}{ng} = \frac{cf^2}{in^2}$.

Observa que $\frac{cf^2}{in^2} > \frac{cf^2}{ln^2}$.

Com els triangles cfh i lnh són semblants, $\frac{cf^2}{ln^2} = \frac{fh^2}{nh^2}$.

I per tant conclou que, $\frac{fg}{ng} > \frac{fh^2}{nh^2}$.

Seguidament comença l'anàlisi, o sigui, la identificació dels segments amb lletres per operar amb elles com si fossin conegudes. Anomena $b = fg$, que és donat, $a = fh$, que és la incògnita i defineix $e = fn$ com zero. En aquest cas, observant el dibuix crec que aquest zero s'ha d'interpretar com una quantitat molt, molt petita però no la podem interpretar com el valor zero actual.

Llavors escriu $ng = b - e$ i $nh = a - e$.

Ho substitueix a la relació $\frac{fg}{ng} > \frac{fh^2}{nh^2}$, que havia trobat abans, però, utilitzant que ha definit $e = fn$ com zero, l'escriu ara com a igualtat, $\frac{fg}{ng} = \frac{fh^2}{nh^2}$, ja que si $fn = 0$, llavors $ng = fg - fn = fg$, i $nh = fh - fn = fh$. Aleshores obté $\frac{b}{b-e} = \frac{a^2}{a^2-2ae+e^2}$.

A continuació, fa el producte creuat, $ba^2 - 2bae + be^2 = ba^2 - ea^2$.

Eliminant els termes comuns, dividint per e, i després utilitzant que $e = 0$, arriba a la solució $a = fh = 2b$.

Tot i que els noms que dóna als punts de la figura són diferents, pel que fa als càlculs, el procediment que recull Hérigone al *Cursus mathematicus* és el mateix que utilitza Fermat per trobar també la tangent de la paràbola. La diferència principal és que, com en el cas dels màxims i mínims, a l'anàlisi d'Hérigone la e, i per tant la separació entre els punts, està definida com zero, o el que podríem considerar una quantitat molt petita, i en conseqüència, en comparar les expressions per al punt de tangència i l'altre punt pertanyent a la tangent, tampoc parla d'adigualació, sinó que ho expressa com a igualtat.

En el cas de Fermat, degut a l'ambigüitat de no donar mai un valor concret per la E, no apareix explícitament el problema de la divisió per zero, que sí que hi ha al *Cursus mathematicus*. Tot i que avui en dia salta a la vista aquest fet, Hérigone no el destaca de cap manera.

6.3. Conclusions

Tot i que el mètode de Fermat circulava en forma de cartes manuscrites i còpies d'aquestes, és gràcies a la seva publicació en el *Cursus mathematicus* d'Hérigone que la majoria de matemàtics europeus l'arriben a conèixer. [31] Per tant cal destacar la seva importància pel que fa a la difusió del mètode de màxims i mínims de Fermat.

Els escrits de Fermat no van ser publicats fins el 1679, posteriorment a la publicació del mètode al *Cursus mathematicus,* el 1642. Per tant, Hérigone hauria pogut llegir les seves cartes sobre el mètode o còpies d'aquestes, quan circulaven en forma manuscrita. Ja que, a continuació dels exemples de les tangents, on atribueix el mètode a Fermat, explica que havia vist manuscrits dels escrits de Fermat sobre els *Plane Loci* d'Apol·loni, i *Ad locos planos et solidos isagoge.* [56]

Al *Cursus mathematicus*, Hérigone no dóna un algoritme general dels passos a seguir per resoldre els problemes de màxims, mínims i tangents, com sí havia fer Fermat en algun dels seus escrits. Tot i això, el fet que a tots els exemples concrets se segueix la mateixa estructura, i tenen els mateixos passos a la resolució, permet abstreure la idea de com aplicar aquest mètode a un problema qualsevol de màxims i mínims.

Els passos que segueix són en essència els de Fermat, però introduint una nova notació algebraica, i utilitzant el mètode analític de Viète, a més de les justificacions de cada pas a partir dels llibres dels *Elements* d'Euclides, que afegeix als marges.

No obstant, hi ha una diferència important amb el mètode de Fermat, ja que Hérigone no parla d'adigualtats, sinó que sempre tracta amb igualtats. Respecte al valor de la e, el defineix com a zero tant en el cas dels problemes de màxims i mínims com en el de les tangents, tot i que Fermat mai li havia assignat un valor a aquesta variable, que denotava per E.

Tot i això, degut a que representa el segment de longitud e als esquemes per als problemes de les tangents, sembla que aquesta e per Hérigone pugui tenir un valor molt petit en aquest cas però no ser nul·la, a diferència dels exemples de màxims i mínims, on el valor de e no queda dibuixat als esquemes.

[56] «Cette methode ne manque iamais: ce que son inventeur asseure, qui est Monsieur Fermat, Conseiller au Parlement de Toulouse, excellent Geometre, & qui ne cede à aucun en l'art Analytique : lequel a aussi tres bien restitué tous les lieux plans d'Apollonius Pergeus, que nous les auons veu en cette ville manuscripts entre les mains de plusieurs, en suite desquels se trouue aussi du mesme autheur, une Isagoge aux lieux plans & solides.» [33, pp. 68-69, Suplement]

7. Conclusions

Fent aquest treball, m'ha interessat veure com els problemes de màxims i mínims es poden resoldre de maneres tan diverses, i amb diferents eines matemàtiques, ja que avui en dia recorreria directament a calcular la derivada i punts crítics, sense pensar en altres possibilitats. La utilitat dels càlculs de màxims i mínims és enorme en molts àmbits, i depenent el camp permeten estalviar gran quantitat de temps, material o diners amb la seva aplicació.

M'he centrat en les figures d'Arquimedes, al-Tusi, Kepler, Fermat i Hérigone, i llegint les seves obres he comprovat que tots ells tenien diferents objectius que els van portar a l'estudi de cadascun d'aquests problemes de màxims o mínims, que resolen amb diferents eines, ja siguin més geomètrics o algebraics.

Per a realitzar aquest treball he intentat, en la mesura del possible, treballar amb les fonts originals i mantenir la notació de cada autor, i quan no ha estat possible, amb les seves traduccions principals. Un dels problemes principals amb què m'he trobat ha estat l'idioma en què es troben aquestes fonts originals, ja que per exemple els escrits de Kepler estan en llatí i en alemany, i els de Fermat en llatí i en francès, mentre que les traduccions més importants d'Arquimedes i al-Tusi es troben en francès, llengües que no domino.

Al llarg del treball, he pogut comprovar la importància de la correspondència entre els diferents autors contemporanis, que permetia la difusió del coneixement. I gràcies a la recopilació i còpies d'aquesta correspondència, molts d'aquests escrits han pogut arribar als nostres temps, com és el cas, per exemple, dels de Fermat, recollits i publicats pel seu fill, o dels tractats d'Arquimedes.

Tot i que els autors que apareixen en el treball hagin pogut tenir referències d'uns als altres, podem veure que en els procediments que utilitzen per determinar els màxims, no comparteixen les mateixes eines, a excepció del cas d'Hérigone, que parteix del mètode de Fermat per explicar-lo al seu *Cursus mathematicus.*

Al-Tusi, Kepler i Fermat havien pogut llegir textos clàssics dels matemàtics grecs com Arquimedes, o les seves traduccions, tot i que potser no haguessin vist l'escrit on Arquimedes determina el màxim. Tot i això, els mètodes que utilitzen als problemes respectius no semblen basar-s'hi. Kepler, tot i resoldre el problema dels barrils amb eines geomètriques, no té semblances en els seus passos amb el mètode d'Arquimedes, mentre que en el cas d'al-Tusi i de Fermat són mètodes més bé algebraics.

Arquimedes, al-Tusi i Kepler, no tenen un mètode general per al càlcul d'extrems, sinó que es tracta d'estudis de casos concrets. Tot i fer demostracions diferents tenen en comú l'estructura, en què primer situen en un segment el punt on s'obté el màxim, i després demostren que és aquest a partir de la comparació amb els valors que s'obtenen per punts a banda i banda d'aquest.

En el cas de Fermat, el fet de tractar els problemes de forma algebraica permet que es pugui aplicar el seu mètode de manera general, a diferència dels mètodes d'Arquimedes, al-Tusi o

Kepler. El mètode de Fermat, l'únic d'entre aquests que es pot aplicar de forma general, és el que més s'aproxima al mètode actual per determinar màxims i mínims.

L'aparició del mètode de Fermat al *Cursus mathematicus* d'Herigone és rellevant ja que li aporta una major difusió que la circulació de les cartes manuscrites. D'aquesta manera, el dóna a conèixer a més matemàtics, tot i que amb un tractament lleugerament diferent al de Fermat per a la variable e. Hérigone també proporciona una notació algebraica més moderna, seguint el mètode analític de Viète i amb una justificació més rigorosa dels passos als exemples que dóna.

Els escrits estudiats en aquest treball no són els únics sobre càlcul de màxims i mínims abans de Newton i Leibniz. Després de Fermat, diversos matemàtics, entre els quals René Sluse (1622-1685), Pietro Mengoli (1627-1686) o Johann Hudde (1628-1704) també van escriure mètodes per determinar màxims i mínims, però degut a l'extensió del treball no es pot incloure un estudi de tots, tot i que podrien ser bons candidats per línies de recerca futura.

Referències

[1] C. B. Boyer, The History of the Calculus and its Conceptual Development, Nova York: Dover Publications, 1959.

[2] M. E. Baron, The Origins of the Infinitesimal Calculus, Nova York: Dover Publications, 1987.

[3] V. J. Katz, A History of Mathematics: An Introduction, 3a ed., Boston: Addison-Wesley, 2009.

[4] Arquimedes i P. Ortiz García, Tratados I. Eutocio: Comentarios. Introducciones, traducción y notas de Paloma Ortiz García, Madrid: Editorial Gredos, 2005.

[5] R. Netz, The Works of Archimedes, Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

[6] J. L. Heiberg, Archimedis opera omnia, cum commentariis Eutocii, Leipzig: Teubner, 1915.

[7] Arquimedes i R. Masià Fornós, Sobre l'esfera i el cilindre. Introducció, text revisat, traducció, notes i figures de Ramon Masià Fornós, Barcelona: Fundació Bernat Metge, 2010.

[8] P. Ver Eecke, Les oeuvres complètes d'Archimède. Suivies des commentaires d'Eutocius d'Ascalon., 2nd ed., Lieja: Vaillant-Carmanne, 1960.

[9] R. Netz, «Archimedes Transformed: The Case of a Result Stating a Maximum for a Cubic Equation,» *Archive for History of Exact Sciences,* núm. 54, pp. 1-47, 1999.

[10] T. L. Heath, The Works of Archimedes, Cambridge: Cambridge University Press, 1897.

[11] E. J. Dijksterhuis, Archimedes, Nova Jersey: Princeton University Press, 1987.

[12] C. B. Boyer i U. C. Merzbach, A History of Mathematics, 3rd ed., Nova Jersey: John Wiley & Sons, 2011.

[13] R. Rashed, The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra, Dordrecht: Springer, 1994.

[14] R. Netz, The Transformation of Mathematics in the Early Mediterranean World, Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

[15] R. Rashed, Sharaf Al-Din Al-Tusi. Oeuvres mathématiques. Algèbre et géométrie au XIIe siècle, vol. II, París: Société d'édition «Les Belles Lettres», 1986.

[16] J. P. Hogendijk, «Sharaf al-Din al-Tusi on the Number of Positive Roots of Cubic Equations,» *Historia Mathematica,* núm. 16, pp. 69-85, 1989.

[17] R. Rashed, Encyclopedia of the History of Arabic Science, vol. 2, Londres: Routeledge, 1996.

[18] J. Kepler, Nova stereometria doliorum vinariorum, in primis Austraci, figurae omnium aptissimae; et usus in eo virgae cubicae compendiosissimus & plane singularis. Accessit Stereometriae Archimedeae Supplementum, Linz, 1615.

[19] N. García, Kepler continuador de Arquímedes. Acerca de Nueva Estereometría de los toneles, Màlaga: Libros ENCASA, 2011.

[20] J. Núñez i J. Portero, «Kepler nos enseña a medir el vino que se bebe,» *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana,* núm. 17, pp. 49-58, 2010.

[21] R. Cardil, «Kepler: The Volume of a Wine Barrel,» [En línia]. Available: https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/kepler-the-volume-of-a-wine-barrel. [Últim accés: abril 2018].

[22] D. J. Struik, A Source Book in Mathematics, 1200-1800, Massachusetts: Harvard University Press, 1969.

[23] C. H. Edwards, The Historical Development of the Calculus, Nova York: Springer-Verlag, 1979.

[24] M. R. Massa Esteve, «El mètode dels indivisibles,» *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques,* vol. 9, pp. 68-100, 1994.

[25] P. Fermat, Varia opera mathematica D. Petri de Fermat Senatoris Tolosani, Tolosa, 1679, reimprès a Berlín, 1861.

[26] M. S. Mahoney, The mathematical career of Pierre de Fermat, 1601-1665, Nova Jersey: Princeton University Press, 1994.

[27] C. C. Gillispie, Dictionary of Scientific Biography, Nova York: Charles Scribner's Sons, 1981.

[28] C. Henry i P. Tannery, Oeuvres de Fermat, París: Gauthier-Villars et fils, 1891-1912,1922.

[29] P. Stromholm, «Fermat's method of maxima and minima and of tangents. A reconstruction,» *Archive for History of Exact Sciences,* núm. 5, pp. 47-69, 1968-9.

[30] J. Pla, P. Viader i J. Paradís, Pierre de Fermat. Obra matemàtica vària, Barcelona: Institut d'Estudis Catalans, 2008.

[31] G. Cifoletti, «La méthode de Fermat: Son statut et sa diffusion,» *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, nouvelle série,* núm. 33, 1990.

[32] F. Viète, Francisci Vietae Opera Mathematica, In unum Volumen congesta ac recognita, operâ atque studio Francisci à Schooten Leydensis, matheseos professoris, 1646.

[33] P. Hérigone, Cursus mathematicus, nova, brevi et clara methodo demonstratus, per notas reales & universales, citra usum cuiuscunque idiomatis, intellectu fáciles, París, 1634,1637,1642.

[34] M. R. Massa Esteve, «Symbolic language in early modern mathematics: The Algebra of Pierre Herigone (1580-1643),» *Historia Mathematica,* núm. 35, pp. 285-301, 2008.

[35] F. Viète, The Analytic Art, Mineola, Nova York: Dover Publications Inc., 2006.

[36] J. Stedall, Mathematics Emerging: A Sourcebook 1540-1900, Oxford: Oxford University Press, 2008.

[37] O. E. Neugebauer, A History of Ancient Mathematical Astronomy, Berlín - Heidelberg - Nova York: Springer-Verlag, 1975.

[38] P. M. González Urbaneja, Arquímedes y los orígenes del cálculo integral, Madrid: Nivola libros y ediciones, S.L., 2009.

[39] E. Giusti, «Les methodés des maxima et minima de Fermat,» *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* vol. XVIII, pp. 59-85, 2009.

[40] N. Farès, «Le calcul du máximum et la "dérivée" selon Sharaf al-Din al-Tusi,» *Arabic Sciences and Philosophy,* núm. 5, pp. 219-238, 1995.

[41] M. R. Massa Esteve, «Nous resultats i procediments en les matemàtiques del segle XVII: càlcul de màxims i mínims a Pietro Mengoli (1626/1627-1686),» *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques,* vol. 31, núm. 1, pp. 51-71, 2016.

APÈNDIX A: Reproducció del lema a l'anàlisi de la proposició 4 del llibre II de *Sobre l'esfera i el cilindre* [57]

La demostració que el sòlid màxim s'obté dividint el segment inicial en dos segments on un és el doble de l'altre segons el comentari d'Eutoci d'Ascaló es reprodueix a continuació. Per fer-ho s'acompanya de les figures 5 i 6.

L'enunciat és "Que si BE és el doble de EA, el sòlid de base el quadrat de BE i alçada EA és el més gran de tots els que es poden prendre de manera semblant amb alçada BA es demostrarà de la manera següent."

Primerament situa perpendicularment els segments AΓ i AB, i pren E tal que BE sigui el doble de EA, és a dir, el punt per al qual demostrarà que s'obté el sòlid més gran. Seguidament estén el segment ΓE fins el punt Z, on talla la recta paral·lela a AΓ que passa per B. I llavors completa el quadrilàter AΓBH prenent el punt H com el punt de tall entre la recta ZB i la paral·lela a AB per Γ, i Θ com el punt de tall entre l'extensió de la recta AΓ i la paral·lela a AB que passa per Z. Pel punt E traça una paral·lela a AΓ, que talla ΘZ en K i ΓH en Λ.

Llavors pren un punt M de manera que EA sigui a AΓ com el rectangle de costats ΓH i HM al quadrat de costat EB. Per tant, el sòlid de base el quadrat de BE i altura EA serà igual al sòlid de base el rectangle de costats ΓH i HM i altura AΓ, i afirma que aquest és el sòlid més gran que es pot construir tallant el segment BA.

Pel punt H traça una paràbola d'eix ZH, i paràmetre HM (és a dir, que per a tot punt T de la paràbola amb ordenada X, el quadrat de costat TX serà igual que el rectangle de costats XH i HM). Segons veu a l'anàlisi del problema, passarà pel punt K. En prolongar-la, segons la proposició I.26 del llibre de les *Còniques* d'Apol·loni, tallarà ΘΓ en un punt, que anomena N.

Pel punt B traça una hipèrbola d'asímptotes NΓ i ΓH, que segons veu també a l'anàlisi, també passa per K.

Llavors construeix HΞ com prolongació de ZH tal que tinguin la mateixa llargada, i traça una recta de Ξ a K, ΞK, que talla l'extensió de la recta AΓ en un punt, que anomenarà O. Per la proposició I.33 de les *Còniques* d'Apol·loni, afirma que aquesta recta ΞK serà tangent a la paràbola.

Com que ha suposat que BE és el doble de EA, és a dir que ZK és el doble de ΘK, i el triangle OΘK és semblant al triangle ΞZK, llavors ΞK també és el doble de KO.

Per altra banda, ΞK és el doble de KΠ (prenent Π com la intersecció de OΞ amb ΓM) ja que per construcció ΞZ és el doble de ΞH i ΠH és paral·lela a KZ, és a dir, per semblança entre triangles. A partir d'aquesta proporció i de l'anterior, determina que OK ha de ser igual a KΠ.

[57] Traducció a partir de [8], [9], [5] i [4].

Per tant, com la recta ΟΚΠ està entre les asímptotes de la paràbola i és tallada per la meitat, afirma que ha de ser tangent a la hipèrbola, pel recíproc de la proposició 3 del llibre II de les *Còniques* d'Apol·loni.

Com és tangent a la paràbola en el mateix punt, K, conclou que la paràbola és tangent a la hipèrbola en K.

Seguidament, pren un punt Σ a l'atzar en AB, i hi traça una recta ΤΣΥ paral·lela a ΚΛ, que tallarà la hipèrbola en el punt que anomena T i la recta ΓΗ en el punt que anomena Y. Per T, traça la recta ΦΤΧ, paral·lela a ΓΗ, que talla ΓΝ en el punt que anomena Φ i talla HZ en el punt que anomena X.

Pel teorema 12 del llibre II de les *Còniques* d'Apol·loni, que utilitza la propietat de la hipèrbola, afirma que el rectangle de diagonal ΦΥ és igual al rectangle de diagonal ΓΒ. Ambdós contenen el rectangle de diagonal ΓΣ, i per tant, al restar-lo d'ambdós rectangles anteriors, obté que els rectangles que queden, ΦΣ i ΣΗ són iguals, i que per tant ΓΧ passa per Σ.

Com que el quadrat de costat ΨΧ, on Ψ és el punt d'intersecció entre la paràbola i ΦΧ, és igual al rectangle ΧΗΜ (per la proposició 11 del llibre I de les *Còniques* d'Apol·loni, que utilitza la propietat de la paràbola) llavors el quadrat de costat ΤΧ, que és menor que el de costat ΨΧ, és menor que el rectangle ΧΗΜ. Llavors pren el punt Ω a ΓΜ tal que el rectangle ΧΗΩ sigui igual al quadrat de costat ΤΧ.

Fa notar que ΣΑ és a ΑΓ com ΓΗ a ΗΧ, i prenent com a alçada comú ΗΩ, ΓΗ és a ΗΧ com el rectangle ΓΗΩ és al rectangle ΧΗΩ. Aquest últim rectangle és igual al quadrat de costat ΤΧ, que és igual al quadrat de costat ΣΒ. Per tant el sòlid de base el quadrat de costat ΒΣ i alçada ΣΑ és igual al sòlid de base el rectangle ΓΗΩ i alçada ΓΑ degut a les proporcions anteriors.

A més, el sòlid de base el rectangle ΓΗΩ i alçada ΓΑ és menor que el sòlid de base en el rectangle ΓΗΜ i alçada ΓΑ ja que el rectangle ΓΗΩ és menor que el ΓΗΜ. Per tant el sòlid de base el quadrat de costat ΒΣ i alçada ΣΑ és més petit que el de base el quadrat de costat ΒΕ i alçada ΕΑ.

Afirma, llavors que es demostra d'aquesta manera per qualsevol punt Σ entre E i B al segment AB.

Seguidament prova que els sòlids de base el quadrat de costat Βς i alçada ςΑ obtinguts per als punts ς entre E i A també són menors que el de base el quadrat de costat ΒΕ i alçada ΕΑ, ajudat del diagrama de la figura 5.

Anàlogament al cas anterior, traça per ς la recta ϚςΡ paral·lela a ΚΛ on anomena Ϛ el punt d'intersecció amb la recta ΓΗ i P el punt d'intersecció amb la hipèrbola, la qual tallarà per la proposició 13 del llibre II de les *Còniques* d'Apol·loni. Per P traça la recta Α'ΡΒ' paral·lela a AB, que talla la recta ΓΑ en Γ', la paràbola en A' i la recta HZ en B'.

Per la proposició 12 del llibre II de les *Còniques* d'Apol·loni, a partir de la propietat de la hipèrbola, el rectangle de diagonal Γ'Ϛ serà igual al rectangle de diagonal AH, i per tant la recta traçada des de Γ fins B' passarà per ς.

I per la proposició 11 del llibre I de les *Còniques* d'Apol·loni, que utilitza la propietat de la paràbola, el quadrat de costat A'B' és igual al rectangle B'HM, i per tant el quadrat de costat PB' ha de ser menor que el rectangle B'HM. Llavors situa el punt Ω a la recta ΓM tal que el quadrat de costat PB' sigui igual al rectangle B'HΩ.

Seguidament, observa que ςA és a AΓ com ΓH a HB', i prenent HΩ com alçada comú, que ΓH és a HB' com el rectangle ΓHΩ és al rectangle B'HΩ. Aquest últim rectangle és igual al quadrat de costat PB' per la observació anterior, que és igual al de costat Bς. Llavors, el sòlid de base el quadrat de costat Bς i alçada ςA és igual al sòlid de base en el rectangle ΓHΩ i alçada ΓA.

Llavors afirma que com el rectangle ΓHM és més gran que el rectangle ΓHΩ, llavors el sòlid de base el quadrat de costat BE i alçada EA (que és igual al sòlid de base ΓHM i alçada ΓA) és el més gran que el de base el quadrat de costat Bς i alçada ςA, i que es demostra de la mateixa manera per tots els punts entre E i A.

Per tant, conclou que el sòlid de base el quadrat de costat BE i alçada EA és el més gran de tots els que es poden prendre de manera semblant quan BE sigui el doble de EA.

APÈNDIX B: Carta a Brûlart de Saint-Martin[58]

El mètode dels màxims i els mínims es basa només en dos o tres fonaments.

D'antuvi suposo que la recerca porta a una situació que depèn d'un terme únic, com ara, per exemple, quan volem dividir una línia de manera que el rectangle que formen les dues parts tingui una àrea donada d'avant mà.

En la línia tenim dos punts que satisfan la qüestió. Ara bé, si el que volem és determinar el més gran de tots els rectangles possibles, només hi haurà un punt que ho compleixi, que, en el nostre exemple, és el punt mig del segment. Heus ací la raó per la qual Pappus, en el llibre setè, l'anomena sempre maximum, unicam et singularem, i també minimam. La paraula grega és μοναγοζ , un terme que va sorprendre Commandino, que va dir, ben clarament, que no l'entenia.

Cal, doncs, buscar un punt únic, a la dreta i a l'esquerra del qual tots els punts donin sempre valors més grans o més petits que el que produeix el punt que busquem.

Importa, per tant, comparar el punt únic amb tots els punts de la dreta i de l'esquerra que puguem imaginar. Això malauradament no es pot pas fer amb una sola posició, perquè si, per exemple, la línia que dóna el punt únic l'anomenem A, aleshores cal afegir-li o treure-li quelcom per aconseguir la relació que hi ha entre el punt únic i els que es troben a ambdós costats d'ell. Per tant, per lligar el punt únic amb un punt d'un dels costats, podem anomenar la línia que el determina $A+E$. Anàlogament, per comparar-lo amb un punt de l'altre costat, podem anomenar-la $A-E$. L'un queda determinat per l'addició i l'altre per la substracció.

Cal, doncs, trobar un mètode pel qual $A+E$ i $A-E$ proporcionin ambdós el mateix terme per representar A, per tal que A representi efectivament el punt mig.

Tot el que es troba al seu costat augmenta o disminueix quan busquem el valor més gran o el valor més petit.

Sembla, doncs, que el meu mètode proporciona la mateixa equació quan usem $A+E$ i quan usem $A-E$, quelcom que l'experiència i la raó posaran de manifest tot seguit.

Atès que $A+E$ i $A-E$ proporcionen, en ambdós casos, els mateixos termes, observant-se solament una diferència en els termes en els quals les potències són senars perquè es presenten amb signes oposats a aquells en els quals les potències són parells, resulta que l'equació no canvia ni en un cas ni en l'altre.

Sembla, doncs, que, amb el meu mètode, $A+E$ proporciona la mateixa equació que $A-E$. Però això, tot sol, no és suficient, perquè si l'única cosa que calgués fos trobar la mateixa equació quan fem $A+E$ o $A-E$, podríem agafar, per exemple, els dos termes

[58] Traducció a partir de [30]. La carta es troba a [28, pp. 120-125, Suplement].

que tenen E^2 o E^3, etc., en lloc d'agafar els que tenen només E i igualar-los entre si, quelcom que no reeixiria pas.

Cal, doncs, ultra la presentació precedent, que imposa que $A + E$ doni la mateixa equació que $A - E$, afegir una altra condició: si $A + E$ dóna un valor més petit que no pas A, cal també que $A - E$ el doni, i anàlogament, si $A + E$ dóna un valor més gran que no pas A, cal també que $A - E$ el doni més gran.

Ho aclariré amb l'exemple següent:

Cal dividir una línia de manera que el sòlid que s'obté amb un dels termes quan el multipliquem pel quadrat de l'altre sigui màxim.

Sigui A un dels termes de la recta que dóna el punt únic. El sòlid serà, si la línia donada la fem igual a B, $BA^2 - A^3$. Aleshores

$A + E$ donarà: $BA^2 - A^3 + BE^2 - 3AE^2 + 2BAE - 3A^2E - E^3$;

$A - E$ donarà: $BA^2 - A^3 + BE^2 - 3AE^2 - 2BAE + 3A^2E + E^3$.

Si agafem els termes que són mesurats només per E, tindrem que les dues equacions de $A + E$ i de $A - E$ donaran la mateixa equació, atès que caldrà igualar $2BAE$ a $3A^2E$.

Si agafem, en canvi, els termes que són mesurats per E^2, també tindrem una mateixa equació en el cas $A + E$ i en el cas $A - E$, perquè, en ambdós casos, haurem d'igualar BE^2 a $3AE^2$. Cal, doncs, justificar per què prenem el cas de E simple en lloc de qualsevol de les seves potències.

La raó és que és necessari que en les dues posicions els homogenis que es comparen amb $BA^2 - A^3$ siguin ambdós més petits que $BA^2 - A^3$.

Cal, doncs, que

$BA^2 - A^3 + BE^2 - 3AE^2 + 2BAE - 3A^2E - E^3$ sigui més petit que $BA^2 - A^3$,

i alhora que

$BA^2 - A^3 + BE^2 - 3AE^2 - 2BAE + 3A^2E + E^3$ sigui més petit que $BA^2 - A^3$,

quelcom que només s'aconsegueix igualant entre si els termes que són mesurats per la més baixa de les potències de E, que en aquest exemple és E.

La raó de tot això és que els termes, mesurats per la potència més baixa de E, tenen sempre una relació més gran que no pas els que són mesurats per E^2, i una relació més gran que els termes mesurats per E^3, E^4, etc.

En aquest exemple, si agafem $A + E$ i considerem l'equació dels dos termes mesurats solament per E, tindrem, d'una banda, $2BAE$ i, de l'altra $3A^2E$, on $2BAE$ té més raó amb $3A^2E$ que (si agafem el dos termes mesurats per E^2) BE^2 amb $3AE^2$. La justificació de tot això és que la multiplicació analítica, en l'equació precedent, dobla la B, mentre que aquí és simple.

Si igualem, doncs, $2BAE$ amb $3A^2E$, aleshores BE^2 serà més petit que $3AE^2$.

Amb això provarem que tots el termes que són marcats pel signe $+$ són més petits que els que ho estan pel signe $-$.

La darrera potència de E, que sempre es troba sola, i que en aquest exemple és E^3, no canvia en res l'ordre de l'equació sigui quin sigui el signe amb què estigui marcada, la qual cosa se'ns mostra amb tota claredat per simple observació.

La raó principal d'això és que els dos termes marcats per E^2, essent en una relació més gran que no pas els que ho estan per potències superiors a la de E^2, serveixen de clau per determinar el valor màxim o el valor mínim. Perquè, si el terme que està marcat per un $+$ és més petit que el terme que esta marcat per un $-$, aleshores la proposició proporciona un màxim; si, en canvi, el que està marcat per un $+$ és de grau superior al terme marcat per un $-$, obtindrem el mínim.

Ara bé, si usem $A - E$, els dos termes mesurats per E^2 tindran el mateix signe.

I, per tant, tots els termes que estiguin marcats pel signe $+$ seran inferiors a aquells que estiguin marcats pel signe $-$.

I en resulta que el mètode i les raons que he aportat són generals.